Problemstillinger i Diskret Matematik

Vejledning til læreren

Generelt

Der findes ingen kanoniseret afklaring af, hvad 'Diskret Matematik' er. I (MSC2010 Database, 2010), som er det matematiske verdenssamfunds aktuelle kategorisering af matematikfeltet som videnskab, findes emnet kun eksplicit som '68Rxx - Discrete mathematics in relation to computer science' og som underkategori '97N70 Discrete mathematics' af kategorien '97Nxx Numerical methods' under '97XX Mathematics Education' (bemærk den meget tætte tilknytning 'Diskret Matematik' og uddannelse). I kontrast hertil har de fleste kategorier en underkategori som på den ene eller den anden måde refererer til 'discrete'. Men hvad Diskret Matematik end er[1], afspejler dette at diskrete metoder og begreber indgår særdeles substantielt i matematik som sådan, og at den voksende betydning er tæt knyttet til anvendelse af computere. Det er i fin overensstemmelse hermed, når gymnasiets læreplaner fokuser på diskrete matematiske metoder og begreber som et aspekt af matematik fremfor at indføre et nyt emne med centrale pensumpunkter, som eleverne skal beherske. Det betyder også, at det ikke er et mål for nærværende forslag til forløb, at eleverne skal blive i stand til at afgøre hvad, der er 'diskret matematik', og hvad, der ikke er.

At Diskret Matematik ikke er underlagt pensumkriterier, opfatter vi som en frisættelse. Nogle didaktiske kvaliteter ved emnet er, at Diskret Matematik forudsætningsfrit og umiddelbart kan sætte fokus på fundamental matematik. *Matematikfaginternt* er der

- 'aksiomatik' fra første færd - definitioner? hvad er reglerne?
- ræsonnement: man er tvunget til at argumentere for sine påstande - har jeg talt rigtigt? er det en vinderstrategi?
- notation og definitioner er afgørende - har jeg beskrevet spillet udtømmende? hvad betyder og hvordan fortolkes afstand mellem to punkter i en vægtet graf?
- osv.

Matematikfageksternt er de fleste diskrete discipliner umiddelbart motiveret af den 'virkelige verden'.

Hvis disse forhold skulle leve under pensumkrav, fx 'pensum Prims algoritme'[2], ville kvaliteterne ikke kunne komme til fuldt udtryk for den enkelte elev. Det forudsætningsfrie og umiddelbare giver derimod rig mulighed for at den enkelte elev kan udfolde sit matematikberedskab – og udgør i øvrigt et stærk løftepotentiale gennem SRP og mundtlig eksamen.

Vi har valgt 3 problemstillinger, som tager udgangspunkt i righoldige spørgsmål, der kan udfoldes i vigtige begreber, betragtningsmåder og metoder fra Diskret Matematik. Matematisk ræsonnement, især 'hvis…, så… ', opdeling i tilfælde, osv. er helt centralt i Diskret Matematik og fremstår formodentligt for eleverne som en naturlig nødvendighed, dersom rammesætningen formuleres, således som problemstillingerne lægger op til: Kan jeg være *sikker på*, at min vinderstrategi holder? Kan jeg være *sikker på*, at jeg har talt

[1] Diskret matematik handler oftest om endelige og numerable strukturer. Det komplementære indbefatter matematik som bygger på sammenhængende variation (i.e. af reelle tal). De tre strenge vi har valgt: spilteori, tællemetoder og grafteori er helt ukontroversielt at opfatte som Diskret Matematik.

[2] I Australien, hvor man netop har inddraget Diskret Matematik i den gymnasiale matematikundervisning, blev 'Prims algoritme' gjort til pensum – ikke fordi den har central betydning for Diskret Matematik, men fordi den i sin overskuelighed tilgodeså ønsket om 'pensum'. Dvs., at noget kunne afprøves 'uniformt for alle' har været bestemmende.

alle muligheder med? Kan jeg være *sikker på*, at jeg har fundet den korteste vej? M.a.o., holder mine forslag og fremgangsmåder? Dette skærper opmærksomheden om argumentation til bunds, skelnen mellem heuristiske argumenter og logisk deduktion, skelnen mellem definitioner og egenskaber ved det definerede, det som jeg kan se for mit indre blik, og hvordan det forklares for andre, osv. [3]. Vi opfordrer til, at læreren sætter fokus på dette.

Det første forløb kan indlejres under 'Spilteori', det andet under 'Tællemetoder', og det sidste under 'Grafteori'. Forløbene er bygget op efter de gymnasiale læreplaners principper om 'matematik på tværs' og 'matematik på langs' i en progression: *Niveau 1, Niveau 2 og Niveau 3*, som kan opfattes som hørende til de gymnasiale niveauer C, B og A.

Hvis man har gennemført ét af forløbene på Niveau 1 (for Matematik C) og ét af forløbene på Niveau: 1 & 2 (for Matematik B & A), har man tilgodeset læreplanernes krav om '*begreber og metoder fra diskret matematik*'. Niveau 3 henvender sig til den lærer, som 'har fået blod på tanden'. I progressionen fra Niveau 1 til Niveau 3 er indbygget en CAS-progression, fra ingen CAS til avanceret bruge af CAS (dvs. helt nye softwarepakker i Maple). Hvor den enkelte lærer vælger at lægge snittet i forhold til gymnasialt niveau afhænger naturligvis af holdets stofvalg, holdets potentiale og hvordan holdet ønsker stoffet det skal indgå i en eventuel mundtlige eksamen.

Man kan selvfølgelig tage spørgsmålene i de tre problemstillinger, som de er. Men de er tænkt i forbindelse med en bestemt didaktisk vinkel med en undersøgelsesbaseret tilgang. I alle forløb indgår faser, hvor eleverne selvstændigt undersøger spørgsmål og formulerer hypoteser eller løsningsstrategier. Det er vigtigt, at disse faser forløber uden lærerindblanding – det er der rig lejlighed til på andre tidspunkter i forløbene. For at faserne kan blive udbytterige, er det vigtigt, at læreren på forhånd har formuleret fasens intentioner klart (læringsmål), har afstukket rammerne (arbejdsformer, materialer, hjælpemidler, gensidige forventninger lærer og elever imellem, …) og har gjort sig forhåndsovervejelser om, hvordan der skal samles op på elevarbejdet, dvs. elevernes hypoteser og strategiforslag. Håndbogen (Jessen, Doorman, & Bos, 2017) giver nogle mere udførlige beskrivelser af undersøgelsesbaseret matematikundervisning, baseret på to fremherskende didaktiske teorier om 'Inquiry based learning'.

Det er vores vurdering, at læreplanernes krav '*undersøgende behandling af matematiske emner og problemstillinger, hvor eleverne prøver sig frem og derigennem opnår ny viden*' finder god grobund i Diskret Matematik. Vores forløb og didaktiske vinkel er synergetisk i forhold til de to intentioner i gymnasiereformen.

Konteksten for de righoldige, udfoldende spørgsmål er af almen karakter. De er realistiske i den forstand, at eleverne umiddelbart kan danne sig forestillinger om dem, men behøver ikke at have autenticitet i forhold til en realverden. Det i denne forstand realistiske giver mulighed for matematisering på tværs. Endvidere er der fokus på 'matematematik på tværs' gennem angivelse af nogle anknytningspunkter til anden gymnasiematematik og andre gymnasiefag. 'Matematik på langs' er tydeligst på Niveau 3, hvor indsigterne fra Niveau 1 & 2 indsættes i en mere overordnet og abstrakt ramme.

Opbygning af det enkelte modul

Hvert modul er beskrevet i to arbejdspapirer, et til læreren og et til eleverne (power-point slides eller uddelingsmateriale i pdf). Elevarbejdet er tænkt som gruppearbejde.

[3] I kontrast hertil: At en kontinuert funktion antager ekstremumsværdier på kompakte intervaller, er intuitivt indlysende, men begrundelsen involverer matematik som er helt og aldeles uden for gymnasiematematik - mange hæl-og-tå-klipninger til følge.

I LÆRER-dokumentet beskrives idéer og tilrettelæggelse af undervisningen i en række faser med udgangspunkt i et udfoldende spørgsmål og tilsigtede læringsmål[4]. Dette dokument henvender sig ***ikke*** til eleverne. Overordnet er der to typer faser:

(1) Elevernes selvstændige arbejde i grupper.
(2) Klassesamlinger som typisk handler om lærerens forklaringer/uddelegeringer af opgave, elevpræsentationer/gensidig konstruktiv kritik/faglige spørgsmål/… samt lærerens sammenfatninger og pointeringer af arbejdet med opgaverne.

Lærerens rolle beskrives bedst som ’forskningsleder’, forstået på den måde, at det undersøgelsesbaserede aspekt bliver reelt og ærligt. Det betyder, at læreren afstår fra tips og vink under elevernes selvstændige arbejde (en forskningsleder kan jo heller ikke foregribe forskningsresultater).

Lærerens faglige indsigt kommer til udtryk i forberedelse og tilpasning af designet samt i opsamling og perspektivering af elevarbejdet, herunder ’professionalisering’ af elevernes ’amatørarbejder’. Det er vigtigt, at respektere diversiteten i elevarbejdet. Den elegante løsning (fx et kort argument) af en simpel version af et problem, kan måske ikke bruges i den mere komplicerede version, mens den gumpetunge løsning (fx møjsommelig optælling af relativt trivielle specialtilfælde) kan rumme kimen til en mere generel løsningstilgang). Vi anser det for vigtigt at pointere, at problemer kan løses på flere måder. I brug af matematik uden for skolen er det sjældent, at det kun er facit, der tæller. Et eksempel til illustration: At 2x2 kryds & bolle uundgåeligt vindes af den, der starter, er en indsigt som selv før-skole børn (forudsat at de kan sidde stille længe nok) hurtigt finder frem til. Men at give flere udtømmende argumenter for, at det er sådan, det er, kan være starten på en analyse af mere komplicerede problemstillinger.

Eleverne bliver kun præsenteret for modulerne gennem power-point slides og eventuelt uddelt materiale. Det er af afgørende betydning, at modulerne afsluttes med fokusering på det matematikfaglige udbytte af modulet, for eleverne: Hvad har vi lært? og for læreren: Hvordan gik det med de tilstræbte læringsmål? Det er lærerens ansvar at tilvejebringe dette fokus og få læringsudbyttet tydeliggjort og manifesteret for eleverne i relation til de institutionelle læringsmål (altså læreplaner og undervisningsvejledninger).

I undersøgelsesbaseret undervisning giver læreren afkald på nogle af de traditionelle styringsmidler, der bl.a. har til hensigt at sikre, at man ved, hvad der skulle være lært. Uden faste pensumholdepunkter kræves en anden slags forberedelse, hvor man har gjort sig forestillinger om, hvilken vej det *kan* gå, og hvordan der i respekt herfor skal samles op på elevernes arbejde. Dette kan helt naturligt give en bekymring for, at man mister styringen med læreprocessen. Men når det lykkes, er det en frydefuld erfaring.

Henrik Bang, Niels Grønbæk, Claus Larsen

Referencer

Jessen, B., Doorman, M., & Bos, R. (2017). *MERIA Practical Guide to Inquiry Based Mathematics Teaching.* (C. Winsløw, Ed.) Project MERIA. Retrieved from http://www.meria-project.eu/activities-results/practical-guide-ibmt

MSC2010 Database. (2010). Retrieved from MathSciNet: https://mathscinet.ams.org/msc/msc2010.html

[4] NB! Metalæring (om at arbejde med matematik osv.) ligger i selve tilgangen og er ikke formuleret som eksplicitte læringsmål.