

Vindere og tabere – Eller fornøjelsen ved at spille spillet

Introduktion

Forløbet handler om at præsentere fangernes dilemma som mønstergyldigt eksempel på et matematisk spil og med udgangspunkt i heri at introducere forskellige spilteoretiske begreber. Fra niveau 1 kender eleverne til analyse af kryds og bolle. I dette forløb vil vi udvikle mere almen spilteori. Spil, der ikke i traditionel forstand er spil, dvs. forhandlinger, konkurrence på markeder, krigssituationer, o. lign. med karakteristika, der er fælles med mere traditionelle spil, vil også blive behandlet. Det vil først og fremmest ske gennem analyse af konkrete spil. Den undersøgende del af forløbet består i, at eleverne selv skal være med til at udvikle forskellige begreber om spil og selv bl.a. gennem konkrete eksperimenter foretage analysen. Behandlingen er uformel, dvs. indførelsen af en matematisk notation begrænses til et minimum.

Udfoldende spørgsmål

Hvorfor får en gruppe rationelle aktører ikke altid det største udbytte samlede set?

Forudsætninger

Erfaringer med analyse af simple spil (se niveau 1 om spil), argumentation 'hvis ..., så'. Kendskab til optimering fra andre matematiske emneområder.

Tilsigtede læringsmål

At kunne redegøre for, hvad der (matematisk) karakteriserer et spil. At kunne identificere forskellige situationer som varianter af fangernes dilemma. At kunne beskrive matematiske spil ved brug af centrale spilteoretiske begreber og analysere konkrete spil som "fangernes dilemma" – herunder at opstille udbyttematricen for spillet.

Note om spil som model: Spilteori er et stort og meget komplekst matematisk emneområde, der er forholdsvist nyt. Selvom der findes ældre bidrag af eksempelvis Euler, så er spilteori i sin nuværende form udviklet i midten af det 20. århundrede og frem. Flere Nobelpriser er givet i økonomi til arbejde inden for spilteori. Spilteori er således anvendt matematik, hvor nogle af anvendelserne vil blive behandlet på Spilteori niveau 3.

Forslag til hjælpemidler

Papir & blyant.

Andet materiale

Et spil kort, M&Ms.

Fase 1

Eleverne sættes i gang med at diskutere om følgende aktiviteter er spil.

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> 3x3 kryds og bolle | <input type="checkbox"/> At spille fuld |
| <input type="checkbox"/> 2x2 kryds og bolle | <input type="checkbox"/> Pokerspil |
| <input type="checkbox"/> Skak | <input type="checkbox"/> Sten/saks/papir |
| <input type="checkbox"/> Andespil | <input type="checkbox"/> En bager i en landsby, der skal beslutte, om prisen på brød skal sættes op eller ej. |

Eleverne skal arbejde selvstændigt med opgaven, og de skal begrunde deres svar og specificere, hvilke elementer ved aktiviteterne de lægger vægt på.

Fase 2

Eleverne præsenterer deres svar fra gruppearbejdet. Overvejelserne og de kriterier, de lægger til grund for deres svar, diskuteres.

Læreren: I præsentationen vil der sikkert komme forskellige konkrete formuleringer, og der kan være en del uenighed, der diskuteres. Læreren præsenterer, hvad der karakteriserer et **matematisk** spil:

- regler - og her forstås faste regler
- hvad, der kommer ud af spillet - "hvad vinder man"
- usikkerhed, om hvad der kommer ud af spillet (det matematiske spil må være spændende og ikke forudsiges på forhånd for deltagerne)
- der træffes (rationelle) valg/beslutninger/træk undervejs
- ingen snyd

Andre temaer kan forekomme i diskussionerne:

- simultane-/sekventielle spil
- nulsumsspil
- itererede spil
- spil med stokastiske elementer
- kender alle spillere til spillets regler, alle træk/valgmuligheder samt alle udbytte muligheder – dvs. har spillerne fuldstændig information om spillet?

Fase 3

I fælleskab kan man med disse kriterier vende tilbage til aktiviteterne fra fase 1 og diskutere, om man vil fastholde sine svar (matematiske spil eller ej).

Fase 4

Eleverne bliver præsenteret for følgende spil:

Eleverne går sammen to og to. Hver spiller har to kort, et sort og et rødt. De vælger at lægge et af kortene frem samtidigt, idet

- Hvis du lægger et sort kort frem og din modspiller et rødt, får du 3 M&Ms og din modstander ingen.
- Hvis du lægger et rødt kort frem og din modspiller et sort, får du ingenting, mens din modstander får 3 M&Ms.
- Hvis du lægger et sort kort og din modspiller et sort, får I begge 1 M&Ms.
- Hvis du lægger et rødt kort frem og din modstander også spiller et rødt kort, får I begge 2 M&Ms.

Læreren præsenterer spillet (der kun spilles en gang) og sikrer sig, at eleverne har forstået spillet. Lad eleverne overveje, hvilket træk de skal spille, inden de sætter sig sammen to og to for at spille.

Fase 5

Eleverne får deres gevinst, og det noteres, hvordan spillene er gået. Eleverne præsenterer, hvorfor de valgte at spille, som de gjorde.

Læreren samler op på svarene. En analyse af spillet præsenteres med udgangspunkt i udbyttematricen¹, der angiver spillernes udbytte, hvor elevens egen gevinst er markeret med fed type:

¹ Udbyttematricen kaldes også bimatricen, når der er to aktører, idet der i hver celle angives værdier for aktørernes udbytte af de valgte træk.

		Modstanderens træk	
		Rødt	Sort
Dit træk	Rødt	2/2	0/3
	Sort	3/0	1/1

Som det fremgår af udbyttematricen, vil elevens optimale træk være sort i begge tilfælde – med 3 mod 2 M&Ms, hvis elevens modstander spiller rødt kort, og 1 mod 0, hvis elevens modstander spiller sort. Elevens modstander vil som rationel aktør tænke det samme som en selv, hvorfor begge vil spille sort. Det fremgår af udbyttematricen, der repræsenterer en analyse af spillet som sådan – og ikke kun den enkelte spillers perspektiv, at det største udbytte fremkommer ved, at begge vælger rødt. Det er dog ikke noget, man som lærer, behøver at fremhæve på dette trin.

Fase 6

Eleverne præsenteres for fangernes dilemma og skal diskutere;

- Hvori består dilemmaet i "fangernes dilemma"?
- Er fangernes dilemma det samme spil som kortspillet ovenfor?
- Hvordan opstilles udbyttematricen til spillet?

Læreren præsenterer fangernes dilemma, der kan formuleres som følger;

Der er blevet begået et væbnet røveri, hvor to mistænkte er blevet anholdt. Politiet har ret tynde beviser og kun materiale nok til at sigte de to for at være i besiddelse af flugtbilen, men ikke nok til at sigte dem for den grovere forbrydelse i form af at begå væbnet røveri. De to personer holdes adskilt, så de ikke kan kommunikere. Politiet giver hver af de mistænkte valget mellem at forråde den anden eller holde mund.

- Hvis A samarbejder med politiet og angiver B, og B holder mund, så får B 6 års fængsel, mens politiet belønner A for samarbejdet ved at lade A gå fri.
- Hvis begge angiver hinanden får de strafnedsættelse for at samarbejde, men da strafnedsættelsen er i forhold til den grove forbrydelse, får de hver 3 års fængsel.
- Hvis begge holder mund, er der kun grundlag for at dømme dem for besiddelse af flugtbilen, hvilket giver 1 års fængsel.

Udbyttematricen kan se ud som følger:

Mistænkte A \ Mistænkte B	Holder mund	Samarbejder
	Holder mund	Samarbejder
Holder mund	-1/-1	0/-6
Samarbejder	-6/0	-3/-3

Fordelen ved de negative værdier er, at man stadig skal se på største værdier som i kortspillet. Alternativt kan man modellere spillet ved en udbyttematrice med positive værdier. Så skal man se på mindsteværdier.

Fase 7

Eleverne præsenter deres svar.

Læreren samler op på svarene. På dette trin skal læreren sikre, at eleverne er klar på dilemmaet: At den enkeltes rationelle valg ikke giver det største udbytte (i dette tilfælde mindste straf) samlet set. Der kan i denne forbindelse vendes tilbage til kortspillet.

Fase 8

Eleverne præsenteres for en række situationer, der analyseres, og hvor udbyttematricen opstilles. Det diskuteres, om de er varianter af kortspillet/fangernes dilemma.

Læreren præsenterer følgende situationer svarende til opgave 5, som også udleveres på papir til eleverne:

Reklamekampagne: To firmaer har hver en markedsandel på 50% og tjener hver 5.000.000 kr. på deres produkt. I forbindelse med julen skal de nu beslutte, om de skal lave en reklamekampagne, der koster 2.000.000 kr. Hvis det andet firma beslutter ikke at gøre det samme fås en markedsandel svarende til 80%. Gennemfører de begge en reklamekampagne, fastholde de deres markedsandel (men de har så haft udgifter til reklamekampagnen).

Hjortejagt: Et kendt spileksempel kaldes hjortejagten. I spillet kan to spillere vælge at jage en hjort eller en kanin. Den første giver mere kød (mad nok til en person i 4 dage) end sidstnævnte (mad til en person i 1 dag). Hvis hjorten skal nedlægges, skal der samarbejdes, så hvis en spiller forsøger at jage hjorten, mens den anden jager kaninen, vil han komme tomhændet ud af jagten. Men hvis de begge jager hjorten, vil de dele byttet (2, 2). Kaniner kan jages enkeltvis, og der er mange af dem, så hvis valget falder på kaninjagt, får man udbytte, uanset hvad den anden vælger at jage.

Bytte caps: Bjarke har en blå cap men foretrækker en rød, mens Anna har en rød cap men foretrækker en blå. Begge foretrækker at have to caps frem for en, så de frit kan vælge, hvilken cap de vil gå med. De vil dog nødtigt gå i skole uden cap. De får nu hver valget mellem enten at give sin cap til den anden, eller at beholde den de har.

Fase 9

Eleverne: For hver af opgaverne præsenterer grupperne de opstillede udbyttematricer samtidigt, og resultaterne sammenlignes og diskuteres.

Læreren styrer diskussionen og konkluderer efter opsamlingen på hver af de 3 opgaver.

Fase 10

Eleverne spiller det itererede kortspil med blå/røde kort – eksempelvis med 10 gentagelser (og tilsvarende flere M&Ms).

Læreren samler op på resultaterne, hvor mange M&Ms har den enkelte elev vundet? Er der tale om nye strategier/snyd?

Tjekspørgsmål til de opstillede læringsmål

Her følger et par spørgsmål, som kan teste elevernes faglige forståelse af forløbet.

a. Kan følgende situation beskrives som et (matematisk) spil:

Det er sent på eftermiddagen, og du er i en bil på motorvejen i et fremmed land sammen med nogle venner. I er ved at være sultne og skal finde – ikke kun et sted, men et *godt* sted at spise. Du har en god ide, om hvad det vil sige, at et sted er hyggeligt, og du kan vurdere det med det samme. Du ønsker at spise et mindeværdigt sted. Desværre ved du ikke, hvor mange spisesteder I vil komme forbi på jeres videre færd, og du ved ikke noget om, hvordan kvaliteten af spisesteder ser ud. Værre er det, at du ikke kan spørge nogen, fordi du ikke taler landets sprog. Du ved også, at du på et tidspunkt om aftenen bliver nødt til stoppe og spise, uanset om det er et *godt* sted eller ej.

Bemærk: Det er ikke nødvendigt at eleverne opstiller en model, men blot at de afgør, om der er tale om et spil jf. de kriterier, der er opstillet.

- b. Udfyld et sæt af værdier i de tomme felter i udbyttematricen nedenfor, således at man får en variant af fangernes dilemma. Begrund dit svar.

Spiller A \ Spiller B	Valg 1	Valg 2
Valg 1	-2/-2	
Valg 2	0/-4	

- c. Kan nedenstående udbyttematricen være en model af fangernes dilemma? Begrund dit svar.

Spiller A \ Spiller B	1. træk	2. træk
1. træk	4/4	0/0
2. træk	0/0	2/2