Genererende polynomier – Eller fornøjelsen ved at dele

Nedenstående er vejledning til læreren. Eleverne instrueres vha. slides og uddelt materiale. De typiske udregninger er som hjælp vist i et Mapleark og kan på lignende vis gennemføres i andre programmer.

Forudsætninger

Tælleprincipper (additiv, multiplikativ), polynomiumsalgebra (håndregning for beregning af koefficienter i sum og produkt i hvert fald indtil grad 2), potensregler og parentesregler så eleverne forstår principperne for udregning af led af højere grad i sum og produkt. CAS-kompetencer til at udføre mere kompliceret polynomiumsalgebra.

Tilsigtet læringsmål

Eleverne skal kunne opstille genererende polynomier for simple kombinatoriske problemer: veksling af penge, antal slikposer med bindinger på indhold, osv. Eleverne skal kunne redegøre for, hvordan det genererende polynomiums koefficienter giver svar på det kombinatoriske problem, håndregne de første koefficienter i polynomiumsprodukter af vilkårlig grad og benytte CAS-værktøj til det generelle udtryk.

Forslag til redskaber

Blyant/papir, tavle/farvekridt, computer med CAS værktøj, matadorpenge, …

Den udfoldende opgave

I en hæveautomat på et kasino kan man hæve beløb til at spille for. Automaten kan give beløbet i mønterne 1 kr., 2 kr., 5 kr., 10 kr., 20 kr., 50 kr. og 100 kr. På hvor mange måder kan automaten udbetale 100 kr.? (Svar 4563).

Første fase

Eleverne overvejer i grupper uden lærerens indblanding strategier til at bestemme svaret på den udfoldende opgave. Der er tale om strategier, ikke selve løsningen, som ikke forventes i denne fase. Strategierne skal fremlægges for klassen som kommenterer og stiller spørgsmål. Læreren samler op. Hvilke tælleprincipper er brugt?

Anden fase

100 kr. er valgt så stort at eleverne (formodentlig) ingen chancer har for at løse problemet til ende.

Vi stiller derfor de mindre komplicerede spørgsmål:

På hvor mange måder kan automaten udbetale 10 kr.? (Svar 11)

Man kan bestemme, at man fx vil have mindst én 2 kr. På hvor mange måder kan automaten udbetale 10 kr.? (Svar 7)

Automaten har været brugt længe, så der er ingen 5 kr. tilbage. På hvor mange måder kan automaten udbetale 10 kr.? (Svar 7)

Eleverne arbejder selvstændigt med disse spørgsmål (dvs. uden lærerens indblanding), først enkeltvis (sætte sig ind i spørgsmålet) og dernæst i grupper, hvor der udveksles idéer. Herefter præsenterer grupperne deres forslag til svar (helt eller delvist) og gør rede for deres overvejelser. Læreren samler op og sammenholder med strategier og tælleprincipper vedrørende 100 kr. Kan de bruges til det store problem?

Tredje fase

Vi stiller nu de samme spørgsmål i en ny forklædning:

På hvor mange måder kan man skrive x^{10} som et produkt af potenser x^1, x^2, x^5, x^{10}?

Fx $x^{10} = x^5 \cdot x^2 \cdot (x^1)^3$. For tydelighedens skyld har vi sat $x = x^1$ og 0'te potens er $x^0 = 1$. (Svar 11)

På hvor mange måder kan man skrive x^{10} som et produkt af potenserne x^1, x^2, x^5, x^{10}, hvis der skal være mindst en faktor x^2? (Svar 7)

På hvor mange måder kan man skrive x^{10} som et produkt af potenserne x^1, x^2, x^5, x^{10}, hvis potensen x^5 ikke må indgå?(Svar 7)

Eleverne arbejder igen selvstændigt uden lærerens indblanding og fremlægger deres opdagelser. Læreren samler op: Begge faser handler om at skrive 10 som en kombination af de hele tal 1, 2, 5 og 10, som fx $10 = 5 + 2 + 3 \cdot 1$.

Fjerde fase

Læreren gennemgår lidt om genererende polynomier:

1 kr.	$x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
2 kr.	$x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$
5 kr.	$x^{10} + x^5 + 1$
10 kr.	$x^{10} + 1$

Vi vil fortolke potenserne som kronebeløb i de forskellige mønter. Fx svarer x^9 til 9 kr. i 1-kr, x^6 til 6 kr. i 2-kr. og et produkt $x^3x^2x^5$ som 10 kroner udbetalt som tre 1-kr., én 2-kr. og én 5-kr. Bemærk, at 0 kr. fortolkes som $x^0 = 1$.

Hvis vi udregner produktet $(x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \cdot (x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1) \cdot (x^{10} + x^5 + 1) \cdot (x^{10} + 1)$, får vi en masse led som vi kan samle sammen i potenser til et polynomium. Vi får konstantleddet $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, førstegradsleddet $x \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = x$, andengradsleddet $x^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot x^2 \cdot 1 \cdot 1 = 2x^2$, osv.

Eleverne skal nu udregne et eller to led mere i produktpolynomiet og tjekke deres resultat på computer.

Hvad bliver koefficienten til 10.-gradsleddet?

Femte fase

Eleverne udregner det fulde polynomiumsprodukt på computer og formulerer selv udbetalingsspørgsmål, som polynomiumsproduktet kan give svar på.

Hvilke polynomier skal man bruge, hvis der skal være mindst én 2-kr.? Hvis der ingen 5-kr. må være? ... Udregn produktpolynomierne og tjek, hvad der tidligere er fundet.

Svar på den oprindelige udfoldende opgave.

Sjette fase

Forskellige opgaver, fx hvor mange forskellige slikposer kan der laves ud fra …? Jf. opgaverne fra Niveau 1.

Eksempel: Henrik får lov at tage 2 M&M pastiller fra en skål med 2 røde, 2 gule, 1 grøn, 1 blå. Dette giver polynomiumsproduktet

$$(1 + x + x^2) \cdot (1 + x + x^2) \cdot (1 + x) \cdot (1 + x)$$

Antallet af måder, som Henrik kan vælge på, er koefficienten til x^2. (Svar 8). Tjekkes med optælling.

Eleverne kan selv udarbejde tælleopgaver, som andre skal løse. De skal selv kunne løse deres opgaver med genererende polynomier.

Syvende fase: Formulering af princippet for genererende polynomier

Scenarium: Der er givet to separate (disjunkte, hvis eleverne kender det begreb) mængder A og B. Det typiske problem, vi har kigget på, består i at vælge objekter fra de to mængder på bestemte måder. Vi indfører betegnelser for antallet af måder, hvorpå man i et givet problem kan vælge et bestemt antal objekter fra hver af de to mængder: 0 objekter kan vælges på $A(0)$ hhv. $B(0)$ måder, 1 objekt kan vælges på $A(1)$ hhv. $B(1)$ måder, 2 objekter kan vælges på $A(2)$ hhv. $B(2)$ måder osv. Til dette valgscenario knytter vi de to *genererende polynomier*:

$$A(0) + A(1)x + A(2)x^2 + A(3)x^3 + \cdots \quad \text{og} \quad B(0) + B(1)x + B(2)x^2 + B(3)x^3 + \cdots$$

Antallet af måder, man kan vælge n objekter fra foreningen af de to mængder, er koefficienten til n'tegradsleddet i produktet:

$$(A(0) + A(1)x + A(2)x^2 + A(3)x^3 + \cdots) \cdot (B(0) + B(1)x + B(2)x^2 + B(3)x^3 + \cdots)$$

som altså er det genererende polynomium for valg af objekter fra foreningsmængden af A og B ($A \cup B$). Dette indses ved en kombination af det additive og det multiplikative tælleprincip.

Eksempel: Mængden A består af 1 objekt, fx en rød kugle. På hvor mange måder kan man vælge n kugler fra A? Vi indser $A(0) = 1$, $A(1) = 1$ og $A(n) = 0$ for $n \geq 2$, så det genererende polynomium er $1 + x$.

På hvor mange måder kan man vælge n kugler fra en mængde bestående af 2 kugler? Vi svarer på dette vha. genererende polynomier. Vi farver kuglerne, fx rød og grøn og lader B være mængden bestående af den grønne kugle. Dette giver som før det genererende polynomium for valg af grøn(ne) kugler, $1 + x$. Det genererende polynomium for at vælge n kugler fra mængden bestående af den røde og den grønne kugler er $(1 + x)(1 + x)$, altså $1 + 2x + x^2$. Så 0 kugler kan vælges på 1 måde, 1 kugle kan vælges på 2 måder, 2 kugler kan vælge på 1 måde, og for $n \geq 3$ kan der ikke vælges n kugler fra en mængde på 2 kugler.

Eleverne skal nu forklare deres hidtidige fremgangsmåder direkte i termer fra dette princip. De kan også forklare princippet til bunds for de første få led i produktpolynomiet. Læreren udformer sin egen slide til dette arbejde.

Broer til andet pensum

Eksemplet er binomialformlen for $n = 2$. Den generelle binomialformel fås ved gentagen anvendelse: $(1 + x)^n$ er det genererende polynomium for at vælge fra en mængde på n objekter. Pascals trekant fås fra identiteten $(1 + x)^n = (1 + x)^{n-1}(1 + x)$ ved at udregne koefficienten til x^k på begge sider af lighedstegnet (fx $C_{n,k} = C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k}$).

Metodiske pointer

Vi undersøger et stort ”uløseligt” problem ved at reducere til mindre overskuelige problemer.

Vi oversætter et kombinatorisk problem til et algebraproblem, hvor vi bare kan regne løs.

At udregne koefficienter er et arbejde af samme størrelsesorden og kompleksitet som at udregne kombinationer, det er faktisk samme problem, men i den algebraiske version har vi adgang til simple beregninger på computer. De kombinatoriske problemer skulle eksplicit programmeres for at blive løst.

Vi løser et konkret problem (med 100 kr.) men løsningen giver svar på alle mulige hæveautomatspørgsmål.

Links med slideshows om ’generating functions’

Der er masser af materiale på nettet, fx

- http://www.math.harvard.edu/~ecp/teaching/Fall2013/55/chapter-8b.pdf
- http://slideplayer.com/slide/8586398/
- https://www.youtube.com/watch?v=-drdeNMoe8w