Genererende funktioner

Vi loader pakken **gfun**

```
> restart;with(gfun);
```

[*Laplace, Parameters, algebraicsubs, algeqtodiffeq, algeqtoseries, algfuntoalgeq, borel, cauchyproduct, diffeq*diffeq, diffeq+diffeq, diffeqtohomdiffeq, diffeqtorec, guesseqn, guessgf, hadamardproduct, holexprtodiffeq, invborel, listtoalgeq, listtodiffeq, listtohypergeom, listtolist, listtoratpoly, listtorec, listtoseries, poltodiffeq, poltorec, ratpolytocoeff, rec*rec, rec+rec, rectodiffeq, rectohomrec, rectoproc, seriestoalgeq, seriestodiffeq, seriestohypergeom, seriestolist, seriestoratpoly, seriestorec, seriestoseries*] **(1)**

Nogle lister

```
> L__1:=[1,-1,sqrt(2),27];
  L__2:=[seq(1,n=0..20)];
  L__3:=[seq(n,n=0..10)];
```

$$L_1 := [1, -1, \sqrt{2}, 27]$$

$$L_2 := [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

$$L_3 := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] \quad \textbf{(2)}$$

Kommandoen **listtoseries** hænger lister til tørre på potenserne

```
> listtoseries(L__1,x);
```

$$1 - x + \sqrt{2}\, x^2 + 27\, x^3 + \mathrm{O}(x^4) \quad \textbf{(3)}$$

```
> listtoseries(L__2,x);
```

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15} + x^{16} + x^{17} + x^{18} + x^{19} + x^{20} + \mathrm{O}(x^{21}) \quad \textbf{(4)}$$

```
> listtoseries(L__3,x);
```

$$x + 2\, x^2 + 3\, x^3 + 4\, x^4 + 5\, x^5 + 6\, x^6 + 7\, x^7 + 8\, x^8 + 9\, x^9 + 10\, x^{10} + \mathrm{O}(x^{11}) \quad \textbf{(5)}$$

Kommandoen **series** udregner genererende funktioner på standardformen som et polynomium af i princippet uendelig grad, fx

```
> series((4)+(5),x,20);
  series((4)*(5),x,20);
```

$$1 + 2\, x + 3\, x^2 + 4\, x^3 + 5\, x^4 + 6\, x^5 + 7\, x^6 + 8\, x^7 + 9\, x^8 + 10\, x^9 + 11\, x^{10} + \mathrm{O}(x^{11})$$

$$x + 3\, x^2 + 6\, x^3 + 10\, x^4 + 15\, x^5 + 21\, x^6 + 28\, x^7 + 36\, x^8 + 45\, x^9 + 55\, x^{10} + \mathrm{O}(x^{11}) \quad \textbf{(6)}$$

```
> series(1/(1-x),x,20);
  series(1/(1-a*x),x,10);
```

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15} + x^{16} + x^{17} + x^{18} + x^{19} + \mathrm{O}(x^{20})$$

$$1 + a\, x + a^2 x^2 + a^3 x^3 + a^4 x^4 + a^5 x^5 + a^6 x^6 + a^7 x^7 + a^8 x^8 + a^9 x^9 + \mathrm{O}(x^{10}) \quad \textbf{(7)}$$

Bemærk syntaksen **series(genererende funktion,variabel,højeste grad man regner til)**

Kommandoen **seriestolist** giver den liste som en genererende funktion frembringer

```
> seriestolist((6));
```
$$[0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55] \quad (8)$$

Man kan være interesseret i et enkelt element fra listen

```
> seriestolist((6))[8];
```
$$28 \quad (9)$$

▶ De generelle regneregler for genererende funktioner

▶ Fibonacci

▶ Hæveautomat

▼ Annuitet

Annuitetsopsparing fx med 10 indbetalinger

```
> series(1/(1-(1+r)*x)/(1-x),x,10);
```
$$1 + (2+r)\,x + \left((-1-r)^2 + 2 + r\right) x^2 + \left(-(1+r)^2(-1-r) + r^2 + 3\,r + 3\right) x^3 + \left(-(1+r)^3(-1-r) + r^3 + 4\,r^2 + 6\,r + 4\right) x^4 + \left(-(1+r)^4(-1-r) + r^4 + 5\,r^3 + 10\,r^2 + 10\,r + 5\right) x^5 + \left(-(1+r)^5(-1-r) + r^5 + 6\,r^4 + 15\,r^3 + 20\,r^2 + 15\,r + 6\right) x^6 + \left(-(1+r)^6(-1-r) + r^6 + 7\,r^5 + 21\,r^4 + 35\,r^3 + 35\,r^2 + 21\,r + 7\right) x^7 + \left(-(1+r)^7(-1-r) + r^7 + 8\,r^6 + 28\,r^5 + 56\,r^4 + 70\,r^3 + 56\,r^2 + 28\,r + 8\right) x^8 + \left(-(1+r)^8(-1-r) + r^8 + 9\,r^7 + 36\,r^6 + 84\,r^5 + 126\,r^4 + 126\,r^3 + 84\,r^2 + 36\,r + 9\right) x^9 + \mathrm{O}(x^{10}) \quad (4.1)$$

Vi ville gerne at Maple havde 'regnet færdigt' så det bliver man måske ikke så meget klogere af.
Med en konkret rentefod kan man generere annuitetslister og finde indestående efter fx 9 terminer

```
> r:=.01;seriestolist((4.1));seriestolist((4.1))[9];
```
$$r := 0.01$$
$$[1, 2.01, 3.0301, 4.060401, 5.10100501, 6.152015060, 7.213535210, 8.285670564, 9.368527269, 10.46221254]$$
$$9.368527269 \quad (4.2)$$

For at blive klogere må vi igen bruge dekomposition i stambrøker. Der gælder
$$\frac{1}{(1-(1+r)\,x)\,(1-x)} = \frac{1}{r}\left(\frac{(1+r)}{1-(1+r)x} - \frac{1}{1-x}\right)$$
hvor højresiden jo er opbygget af kendte genererende funktioner, så vi kan umiddelbart aflæse annuitetsformlen
$$y_n = \frac{1}{r}\left((1+r)^{n+1} - 1\right)$$