Genererende funktioner

Indledning

Af nogle regnes idéen om genererende funktioner som én af den mest slagkraftige matematiske idéer – *overhovedet*! En af de første til at benytte idéen var de Moivre (1667 – 1754). De Moivre ville gerne finde et udtryk for Fibonacci-tallene, der jo som bekendt er givet ved relationerne

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad a_0 = a_1 = 1$$

De Moivre hængte Fibonacci-tallene 'til tørre' på voksende potenser

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

og fik derved et "polynomium" – men med den væsentlige forskel, at graden var uendelig. Der er altså ikke tale om en funktion i sædvanlig forstand. Vi kalder den en *genererende funktion* og bruger stadig sædvanlig funktionsnotation

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

selvom udregning af funktionsværdier så som $f(2)$ ikke giver mening her.

De Moivres idé var at regne løs alligevel, som om det **var** et polynomium:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots +$$

$$xf(x) = 0 + a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots +$$

$$x^2 f(x) = 0 + 0\,x + a_0 x^2 + a_1 x^3 + \cdots +$$

Ved at sammenholde éns potenser kan Fibonacci-relationen nu udtrykkes

$$f(x) - (a_0 + a_1 x) = xf(x) - a_0 x + x^2 f(x)$$

Dersom vi indfører $a_0 = a_1 = 1$, får vi altså $f(x)(1 - x - x^2) = 1$, eller

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

hvis ellers regneoperationerne der behandler genererende funktioner som de var almindelige polynomier, kan gøres til holdbar matematik. Og selvom det er muligt, skal vi også finde ud af, hvordan man kan komme tilbage til Fibonacci-tallene a_n ud fra dette udtryk for $f(x)$.

Dette modul handler om at hænge talfølger til tørre på genererende funktioner og udvikle regneoperationer til beregning af talfølgernes elementer. Vi starter med nogle flere eksempler.

Den generelle hæveautomat

Dette er er videreførelse af Niveau 2 problemet. En hæveautomat kan udbetale beløb i nogle møntenheder (1 kr., 2kr., osv.). På hvor mange måder kan man udbetale xxxx kr. (altså på én gang løse problemet for alle mulige udbetalinger uden begrænsninger på værdien af xxxx)? Antallet af måder som n kr. kan udbetales på, benævner vi c_n. Vi søger et udtryk for den genererende funktion $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ der sætter os i stand til at beregne c_n for alle n.

En opsparingskonto

En annuitetsopsparing består i kontoindsættelse af et fast beløb hver termin. Kontoen forrentes med rentefoden r. Hvis vi benævner den faste indsættelse c, er indestående givet ved

$$a_n = (1 + r)a_{n-1} + c$$

Vi er på jagt efter et udtryk for den tilhørende genererende funktion. Vi kan i almindelighed også finde udtryk for mere komplicerede indbetalingsplaner. (Svar $f(x) = \frac{c}{(1-(1+r)\,x)(1-x)}$.)

En populationsdynamisk model

I en bestemt biologisk population skelner man mellem to generationer (voksne og børn), hvis antal gøres op årligt. Lad os kalde antallet af de to generationer i år n for a_n og b_n. Ud fra nogle simple antagelser kan vi opstille et udtryk for den genererende funktion $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots$ som gør det muligt at beregne populationsstørrelserne. Vores antagelser er

$$a_{n+1} = v \cdot b_n - d \cdot a_n,$$
$$b_{n+1} = f \cdot a_n.$$

Her betegner v den brøkdel der bliver voksne, d er dødsraten og f er fødselsraten. Ved lidt regneri får man

$$b_{n+2} = -d \cdot b_{n+1} + f \cdot v \cdot b_n.$$

Vi kan bruge dette til at finde et udtryk for en genererende funktion, der hænger b_n'erne til tørre på samme måde som ved Fibonacci-relationen. Gennemføres regningerne fås at $b_n = C_1 \cdot \alpha^n + C_2 \cdot \beta^n$, hvor α og β er rødderne i polynomiet $x^2 + d \cdot x - f \cdot v$ og C_1 og C_2 er konstanter som bestemmes af begyndelsesværdierne a_0 og b_0. I et samarbejde med biologi vil det være en biologiopgave at finde realistiske data og fortolke plot af populationsudviklinger.

Algebra med genererende funktioner

Læreren organiserer gennemgang af ovenstående indledning, evt. ved selv at gøre det eller ved at strukturere elevernes arbejde. Læringsmålet er, at eleverne kan redegøre for, hvordan den genererende funktion for Fibonacci-tallene opstår, og hvordan de øvrige eksempler giver anledning til genererende funktioner. Endvidere skal indledningen virke som motivation for behovet for algebra med genererende polynomier.

Genererende funktioner fremkommer ved at hænge uendelige lister af tal til tørre på voksende potenser. Nogle eksempler:

Liste	**Genererende funktion**
$[1, 1, 1, 1, 1, 1, \cdots,]$	$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$
$[1, 2, 3, 4, 5, \cdots,]$	$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots$
$[1, 0, 1, 0, 1, 0, 1 \cdots]$	$1 + x^2 + x^4 + x^6 \cdots$
$[0, 1, -1, 1, -1, \cdots,]$	$x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots$

Sædvanlige polynomier opfattes som lister der ender på lutter 0'er, fx

$[1, 2, 1, 0, \cdots, 0, \cdots]$	$1 + 2x + x^2$
$[-1, -1, 1{,}0, 3, 0, \cdots, 0, \cdots]$	$-1 - x + x^2 + 3x^4$
$[1, 4, 6, 4, 1, 0, \cdots, 0, \cdots]$	$(1 + x)^4$

Man udfører regneoperationer, som om det er almindelige polynomier. Forskellen er blot, at der ikke er en højeste grad, hvor regneoperationerne standser.

I Maple findes en pakke til arbejdet med generende funktioner: Generating Functions, som gør kontrolarbejdet en let. Beregningerne vist på vedlagte Mapleark udleveres på papir til eleverne undervejs, så de selv skal taste.

Læringsmålene for forløbet er: styrkelse af basale algebraiske kompetencer (parentesregler, potensregler, simpel ligningsopstilling og løsning), dybere forståelse af division.

Elevarbejde 1

På det teoretiske plan arbejder vi inden for integritetsområdet af generelle funktioner (eller om man vil, formelle potensrækker). Dette er nyt og kræver, at man har fortrolighed med begreberne hele tal og brøker, som herved (kærkomment ☺) genoplives.

Eleverne starter med at undersøge, hvordan MAPLE REGNER i pakken Generating Functions. De skal regne efter i hånden, så det ikke bliver ren black-box. Fx kan de tjekke de første led af lav grad. Nogle gange kan man dog regne i bund, fx her:

$$(1+x^2+x^4+x^6+x^8+\cdots)\cdot(1+x),$$

(Facit: $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots$. Dette kan regnes i bund: multiplikation med 1 giver lige potenser, multiplikation ned x giver ulige potenser)

men ikke her:

$$\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4-\frac{7}{256}x^5+\cdots\right)^2.$$

(Facit: $1-x$. Skal ikke regnes i bund. Der er tale om (selvfølgelig ☺) taylorrækken for $\sqrt{1-x}$. Men eksemplet er god træning i basal algebra, og resultatet er overraskende: Man kan tage kvadratrødder af (visse) genererende funktioner.)

Maple kan udskrive de generelle regneregler. Eleverne skal formulere indholdet af formlerne, og klassen skal blive enig om indholdet (lærerens ansvar).

Elevarbejde 2

Eleverne skal i grupper svare på: Hvad forstås ved ”en brøk”, ”reciprok” og ”at dividere”? Jf. ppt.

Der kan tænkes flere gode svar på dette:

- Svar inden for $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$
- Funktionsbrøker, fx polynomiumsbrøker.

Læreren samler op: Hvordan skal dette forstås i relation til genererende funktioner? Dele i lige store stykker m.m. giver ikke mening i vores sammenhæng. Brøken $\frac{p}{q}$ er løsning til ligningen $X\cdot q=p$. Det kan være, at ligningen ikke kan løses ($p\neq 0, q=0$), det kan være, at løsningen er uden for vores oprindelige område ($\frac{1}{2}$ er ikke et helt tal, $\frac{1-x}{1+x}$ er ikke et polynomium osv.) I vores tilfælde er vi interesseret i, at brøken er en ny genererende funktion. Vi skal jo fx have genereret Fibonacci-tallene. Opsamling i forhold til den genererende funktion $1-x$:

I. Bestem, hvis muligt, en genererende funktion $f(x)$, så $f(x)(1-x)=1$.
Hvis I. kan løses, så kan vi løse $f(x)(1-x)=g(x)$, for en hvilken som helst genererende funktion $g(x)$.

II. Og hvis vi har fundet listen, der giver $\frac{1}{1-x}$ som genererende funktion, kan vi også finde listen, der giver $\frac{1}{1-a\cdot x}$.

Dette, samt simple dekompositioner i stambrøker, er stort set, hvad vi behøver.

Elevarbejde 3

Eleverne skal nu individuelt løse ligningen

$$f(x)(1-x)=1,$$

dvs. successivt bestemme $a_0, a_1, a_2, \dots$ så

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\ \dots)(1-x)=1$$

Man får $a_0\cdot 1=1$, så $a_0=1$. Dernæst

$$(1+a_1x+a_2x^2+\ \dots)(1-x)=1+(a_1-1)x\cdots=1$$

så $a_1=1$ osv. Man ender med

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Det skal samles omhyggeligt op af læreren, gerne på mere end én måde. Fx også

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 - x) =$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$-x - x^2 - x^3 - \cdots = 1$$

Bemærk, at der er tale om ren algebra. Dette har intet med konvergens af rækker at gøre.

Dette belyses med opgaverne fra slides.

Elevarbejde 4

Løsning af et eller flere af problemerne fra slides i grupper. Man kan evt. fordele forskellige opgaver til forskellige grupper. Eleverne præsenterer deres løsningsforslag for klassen med kommentarer fra andre elever (og lærer).

Et gennemgående fænomen er at finde den formelle potensrække for $\frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c}$ vha. dekomposition i stambrøker, når nævnerpolynomiet har reelle rødder. Der bliver blot tale om linearkombination af geometriske rækker.

Opgaven om populationsdynamik kan indgå i samarbejde med biologi. Biologi kan levere autentiske data og stille biologiske begrundede spørgsmål til modellen. Se også https://en.wikipedia.org/wiki/Leslie_matrix for en mere generel model.