Genererende funktioner

Diskret Matematik Niveau 3

Fase 1

1. Algebra med genererende funktioner

Udregn produkterne

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)$$

$$(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)\,(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)$$

$$(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)\,(1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots)$$

Tjek med jeres CAS-program.

Fase 2

Hvad forstås ved ···?

- En brøk,
  - mellem ····.?
- Reciprok
  - Af ····.?
- At dividere
  - med ···?

Disse spørgsmål giver i første omgang mening for tal. Er der andre matematiske objekter, hvor man meningsfuldt kan tale om disse begreber? Hvad kræves for at det giver fx en brøk giver mening? Kender I andre matematikobjekter end tal hvor man betragter brøker?

2. Algebra med genererende funktioner

Gør rede for at division med visse genererende funktioner giver genererende funktioner som resultat.

$$\frac{1}{1-x} = (1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = (1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots)$$

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x} = (1 + x^2 + x^4 \cdots + x^{2n} + \cdots)$$

Tjek med jeres CAS-program.

3. Algebra med genererende funktioner

Gør rede for at division med visse genererende funktioner giver genererende funktioner som resultat.

$$\frac{1}{1-x^2} = (1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2\cdot n} + \cdots)$$

$$\frac{1}{1-x^{10}} = (1 + x^{10} + x^{20} + \cdots + x^{10\cdot n} + \cdots)$$

$$\frac{1}{1-ax} = (1 + ax + a^2x^2 + \cdots + a^nx^n + \cdots)$$

Tjek med jeres CAS-program.

Fase 3

Hvornår kan man dividere med en genererende funktion?

Gør rede for at vi har vist at man kan dividere med den genererende funktion $1 - x$, og mere generelt med $1 - ax$.

Vi fik 'forærende' $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ bare ved at tjekke at det passede. Men vi kunne også have regnet os frem.

Bestem først a_0, så a_1, osv. således at

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ \ldots)(1 - x) = 1.$$

Denne metode kan videreføres til at bestemme helt generelt hvornår man kan dividere med en genererende funktion. Men vi stopper her.

Fase 4

Formel for dekomposition i stambrøker (til senere brug)

For $\alpha \neq \beta$ gælder

$$\frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha x} - \frac{\beta}{1-\beta x}\right)$$

Tjek evt. ved at regne efter.

Dette kan benyttes til at finde koefficienterne for den genererende funktion

$$\frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$$

Gør rede for hvordan!

Fibonacci-tallene

Redegør for at den genererende funktion for Fibonacci-tallene er

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

Brug dette til at bestemme Fibonacci-tallene i jeres CAS-program.

Benyt dekomposition i stambrøker af udtrykket for den genererende funktion til at finde de Moivres formel for Fibonacci-tallene, og tjek med Maple.

Hæveautomaten

Gør rede for at udbetalinger med 1-kr., 2-kr., 5-kr. osv. er givet ved de genererende funktioner

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots x^n \ldots$
- $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots x^{2 \cdot n} \ldots$
- $\frac{1}{1-x^5} = 1 + x^5 + x^{10} + \cdots x^{5 \cdot n} \ldots$
- $\ldots$
- $\frac{1}{1-x^{1000}} = 1 + x^{1000} + x^{2000} + \cdots x^{1000 \cdot n} \ldots$

Løs dernæst indledningens spørgsmål på Maple for forskellige beløb der skal udbetales

Annuitetsopsparing

Annuitetsopsparing er givet ved relationerne

$$a_n = (1+r)a_{n-1} + c$$

hvor a_n er $\cdots$ (fortolk selv betydningen af betegnelserne)

Vis at den generende funktion for en annuitetsopsparing er

$$f(x) = \frac{c}{(1-(1+r)\,x)(1-x)}$$

Dekomposition giver

$$f(x) = c\left(\frac{1+r}{(1-(1+r)\,x)} - \frac{1}{1-x}\right)$$

Brug dette til at finde udtryk for a_n (annuitetsformlen).

Populationsdynamik

Giv en begrundelse for de to ligninger i den populationsdynamiske model.

Gennemfør detaljerne der fører til

$$b_{n+2} = -d \cdot b_{n+1} + fv \cdot b_n$$

Opstil på samme måde som for Fibonaci-tallene rækkerne for $xf(x)$ og $x^2 f(x)$ og brug relationen ovenfor til at finde et udtryk for $f(x)$.

Gør rede for påstanden at $b_n = C_1 \cdot \alpha^n + C_2 \cdot \beta^n$, hvor α og β er rødderne i polynomiet $x^2 + d\,x - fv$ og C_1 og C_2 er konstanter som bestemmes af begyndelsesværdierne a_0, b_0.