Genererende funktioner

Indledning

Af nogle regnes idéen om genererende funktioner som én af den mest slagkraftige matematiske idéer – *overhovedet*! En af de første til at benytte idéen var de Moivre (1667 – 1754). De Moivre ville gerne finde et udtryk for Fibonacci-tallene, der jo som bekendt er givet ved relationerne

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad a_0 = a_1 = 1$$

De Moivre hængte Fibonacci-tallene 'til tørre' på voksende potenser

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

og fik derved et "polynomium" – men med den væsentlige forskel, at graden var uendelig. Der er altså ikke tale om en funktion i sædvanlig forstand. Vi kalder den en *genererende funktion* og bruger stadig sædvanlig funktionsnotation

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots,$$

selvom udregning af funktionsværdier så som $f(2)$ ikke giver mening her.

De Moivres idé var at regne løs alligevel, som om det **var** et polynomium:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots +$$

$$xf(x) = \ 0 + \ a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots +$$

$$x^2f(x) = \ \ 0 + \ 0\,x + a_0x^2 + a_1x^3 + \cdots +$$

Ved at sammenholde éns potenser kan Fibonacci-relationen nu udtrykkes

$$f(x) - (a_0 + a_1x) = xf(x) - a_0x + x^2f(x)$$

Dersom vi indfører $a_0 = a_1 = 1$, får vi altså $f(x)(1 - x - x^2) = 1$, eller

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

hvis ellers regneoperationerne der behandler genererende funktioner som de var almindelige polynomier, kan gøres til holdbar matematik. Og selvom det er muligt, skal vi også finde ud af, hvordan man kan komme tilbage til Fibonacci-tallene a_n ud fra dette udtryk for $f(x)$.

Dette modul handler om at hænge talfølger til tørre på genererende funktioner og udvikle regneoperationer til beregning af talfølgernes elementer. Vi starter med nogle flere eksempler.

Den generelle hæveautomat

Dette er er videreførelse af Niveau 2 problemet. En hæveautomat kan udbetale beløb i nogle møntenheder (1 kr., 2kr., osv.). På hvor mange måder kan man udbetale xxxx kr. (altså på én gang løse problemet for alle mulige udbetalinger uden begrænsninger på værdien af xxxx)? Antallet af måder som n kr. kan udbetales på, benævner vi c_n. Vi søger et udtryk for den genererende funktion $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots$ der sætter os i stand til at beregne c_n for alle n.

En opsparingskonto

En annuitetsopsparing består i kontoindsættelse af et fast beløb hver termin. Kontoen forrentes med rentefoden r. Hvis vi benævner den faste indsættelse c, er indestående givet ved

$$a_n = (1 + r)a_{n-1} + c$$

Vi er på jagt efter et udtryk for den tilhørende genererende funktion. Vi kan i almindelighed også finde udtryk for mere komplicerede indbetalingsplaner. (Svar $f(x) = \frac{c}{(1-(1+r)\,x)(1-x)}$.)

En populationsdynamisk model

I en bestemt biologisk population skelner man mellem to generationer (voksne og børn), hvis antal gøres op årligt. Lad os kalde antallet af de to generationer i år n for a_n og b_n. Ud fra nogle simple antagelser kan vi opstille et udtryk for den genererende funktion $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots$ som gør det muligt at beregne populationsstørrelserne. Vores antagelser er

$$a_{n+1} = v \cdot b_n - d \cdot a_n,$$
$$b_{n+1} = f \cdot a_n.$$

Her betegner v den brøkdel der bliver voksne, d er dødsraten og f er fødselsraten. Ved lidt regneri får man

$$b_{n+2} = -d \cdot b_{n+1} + f \cdot v \cdot b_n.$$

Vi kan bruge dette til at finde et udtryk for en genererende funktion, der hænger b_n'erne til tørre på samme måde som ved Fibonacci-relationen. Gennemføres regningerne fås at $b_n = C_1 \cdot \alpha^n + C_2 \cdot \beta^n$, hvor α og β er rødderne i polynomiet $x^2 + d \cdot\ x - f \cdot v$ og C_1 og C_2 er konstanter som bestemmes af begyndelsesværdierne a_0 og b_0. I et samarbejde med biologi vil det være en biologiopgave at finde realistiske data og fortolke plot af populationsudviklinger.

Algebra med genererende funktioner

Genererende funktioner fremkommer ved at hænge uendelige lister af tal til tørre på voksende potenser. Nogle eksempler:

Liste	**Genererende funktion**
$[1, 1, 1, 1, 1, 1, \cdots,]$	$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$
$[1, 2, 3, 4, 5, \cdots,]$	$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots$
$[1, 0, 1, 0, 1, 0, 1 \cdots]$	$1 + x^2 + x^4 + x^6 \cdots$
$[0, 1, -1, 1, -1, \cdots,]$	$x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots$

Sædvanlige polynomier opfattes som lister der ender på lutter 0'er, fx

$[1, 2, 1, 0, \cdots, 0, \cdots]$	$1 + 2x + x^2$
$[-1, -1, 1,0, 3, 0, \cdots, 0, \cdots]$	$-1 - x + x^2 + 3x^4$
$[1, 4, 6, 4, 1, 0, \cdots, 0, \cdots]$	$(1 + x)^4$

Man udfører regneoperationer, som om det er almindelige polynomier. Forskellen er blot, at der ikke er en højeste grad, hvor regneoperationerne standser.