

Til
Undervisningsministeriet

Dokumenttype
Rapport, endelig

Dato
Maj 2014

FORSKNINGSKORTLÆGNING

MATEMATIK

(MATHEMATICAL LITERACY)



INDHOLD

1.	Indledning	1
1.1	Baggrund	1
1.2	Formål og reviewspørgsmål	2
1.3	Læsevejledning	3
2.	Tilgang og metode	4
2.1	Den overordnede tilgang	4
2.1.1	Den systematiske forskningskortlægning	4
2.1.2	Den konfigurative, narrative syntese	4
2.2	Kortlægningens design og gennemførelse	5
2.3	Karakteristik af den indsamlede viden	8
2.3.1	Generel karakteristik	8
2.3.2	Vurdering af studiernes forskningskvalitet og evidensvægt	10
3.	Tematisk syntese	13
3.1	Systematisk problemløsning	16
3.1.1	Forskningen på området	21
3.1.2	Indsatser, metoder, praksis og redskaber	21
3.1.3	Resultater og effekter	27
3.2	Modellering	31
3.2.1	Forskningen på området	34
3.2.2	Indsatser, metoder, praksis og redskaber	34
3.2.3	Resultater og effekter	38
3.3	Konkrete materialer	40
3.3.1	Forskningen på området	43
3.3.2	Indsatser, metoder, praksis og redskaber	43
3.3.3	Resultater og effekter	47
3.4	It-understøttet læring	49
3.4.1	Forskningen på området	51
3.4.2	Indsatser, metoder, praksis og redskaber	51
3.4.3	Resultater og effekter	53
3.5	Bevidsthed om egen læring	56
3.5.1	Forskningen på området	59
3.5.2	Indsatser, metoder, praksis og redskaber	59
3.5.3	Resultater og effekter	63
4.	Opsamling og perspektivering	66
4.1	Virkningsfulde indsatser inden for mathematical literacy	66
4.2	Implementeringsforhold	67
4.2.1	Indsatsernes tidsmæssige omfang	67
4.2.2	Graden af implementering	68
4.2.3	Kompetenceudvikling af undervisere	68
4.3	Afrunding	69
	Referenceliste	70

1. INDLEDNING

Den kommende folkeskolereform har til formål at løfte det faglige niveau, at mindske betydningen af social baggrund samt at styrke tillid og trivsel i folkeskolen. Reformen sætter ind på en lang række områder, og med reformens implementering indføres en længere og mere varieret skoledag. Reformen indeholder et såkaldt videns- og kompetencespor, hvor et centralt element er, at skoleudvikling og undervisning skal baseres på viden og forskningsresultater.

På den baggrund har Undervisningsministeriet igangsat en række systematiske forskningskortlægninger og -synteser. Forskningskortlægningerne har til formål at understøtte et fagligt løft af folkeskolen ved at:

- Afdække national og international forskning inden for særligt væsentlige områder i aftalen om et fagligt løft af folkeskolen
- Danne grundlag for praksisrettede publikationer om virkningsfulde initiativer og indsatser, som kan understøtte opfyldelsen af målsætninger for folkeskolereformen
- Understøtte læringskorpsets arbejde med at rådgive kommuner og skoler.

Forskningskortlægningerne er udarbejdet i et samarbejde mellem Rambøll Management Consulting (Rambøll), Dansk Clearinghouse for Uddannelsesforskning/DCU (v/ Camilla Brørup Dyssegaard, Jesper de Hemmer Egeberg og Kasper Steenberg) ved Aarhus Universitet samt VIA University College, Professionshøjskolen UCC og Professionshøjskolen Metropol.

Nærværende rapport er udarbejdet af Rambøll og DCU og præsenterer resultaterne af en systematisk kortlægning og -syntese af forskning inden for **mathematical literacy**¹. Som supplement til forskningskortlægningen er udarbejdet en praksisrettet publikation om, hvordan forskningsresultaterne eventuelt kan implementeres i en dansk kontekst.

1.1 Baggrund

Matematik indgår i alle menneskers hverdag. Når vi køber ind i supermarkedet, cykler til arbejde, laver mad bruger vi matematikkens forståelser til at navigere og orientere os. Det er derfor væsentligt, at vi kan gøre brug af matematikken som en kompetence i de hverdagsammenhænge, vi befinder os i. Den matematiske faglighed skal ikke blot ses som en snæver forståelse, der hovedsageligt handler om formler, brøker og ligninger, men derimod som en faglighed der anvendes bredt til at forstå, fortolke og forudsige begivenheder i verden omkring os.

Resultaterne fra PISA, 2012 viste, at danske elever fortsat ligger lige netop over det samlede OECD-gennemsnit indenfor matematik. Imidlertid har danske elevers resultater inden for faget været moderat faldende siden 2003 (Lindenskov & Jankvist, 2013). Særligt er andelen af elever, der præsterer på de allerhøjeste niveauer blevet signifikant mindre, samtidig med at andelen af elever på de allerlaveste niveauer hverken signifikant er vokset eller blevet mindre. En udvikling, der sætter fokus på relevansen af at styrke de danske elevers matematiske færdigheder. På denne baggrund er der således behov for at bidrage med viden om, hvordan elevernes *mathematical literacy* kan styrkes.

I PISA-undersøgelserne undersøges og måles 15-årige elevers matematiske præstationer via begrebet *mathematical literacy*, der defineres som: "en persons formåen til at formulere, udføre og fortolke matematik i en mangfoldighed af sammenhænge". Det omfatter at kunne ræsonnere matematisk og gøre brug af matematiske begreber, procedurer, kendsgerninger og redskaber til at beskrive, forklare og forudsige fænomener. Det er en hjælp til at erkende den rolle, som matematik spiller i verden og til at foretage og træffe velfunderede vurderinger og beslutninger som konstruktive, engagerede og reflekterende borgere" (Lindenskov & Jankvist, 2013: 19). Denne definition er i god overensstemmelse med formålet med dansk matematik som beskrevet i Fælles

¹ En nærmere definition fremgår af afsnit 1.2.

Mål (Undervisningsministeriet, 2009). Her lægges vægt på, at eleverne, udover at tilegne sig viden, kompetencer og færdigheder i matematik, også skal kunne og ville anvende disse i mange sammenhænge, formuleret i Fælles Mål 2009 som otte matematiske kompetencer.

Det er et mål i den nye folkeskolereform, at elevernes faglighed skal løftes i matematik, og med folkeskolereformen er matematik blevet tildelt flere timer. Det er derfor vigtigt at opnå systematisk opsamling og formidling af viden om, hvad der har effekt i relation til at styrke elevers kompetencer, viden og færdigheder i matematik. Samtidig må de danske elevers matematiske præstationer i PISA forventes at indvirke på optaget til og undervisningen på ungdomsuddannelserne, i særlig grad i de naturvidenskabelige og tekniske fag.

Kortlægningen inden for *mathematical literacy* har til formål at give forskningsinformeret viden til lærere og undervisere, der kan omsættes i praksis i forhold til, hvilke specifikke metoder og indsatser, der indikerer en positiv effekt på elevernes matematiske kompetencer og færdigheder.

1.2 Formål og reviewspørgsmål

I denne forskningskortlægning er der ledt efter svar på følgende reviewspørgsmål²:

Hvilke metoder og indsatser har effekt på eller betydning for elevers mathematical literacy?

I denne kortlægning anvendes betegnelsen *mathematical literacy* i forbindelse med søgning, screening, forskningsvurdering og indsamling af kvalificerede forskningsdokumenter i elektronisk form.

Mathematical literacy forstås analogt til definitionen i PISA fra 2012, som det at kunne formulere, udføre og fortolke matematik i en mangfoldighed af sammenhænge. Denne forståelse af matematik rækker udover, hvad man kan betegne som simple matematikfærdigheder i fx regning og geometri.

Mathematical literacy handler derfor om at kunne anvende de erhvervede matematiske færdigheder og kundskaber i hverdagen, blandt andet ved at kunne forstå og arbejde med matematik i hverdagskontekster – både ved at kunne benytte sig af hverdagen i matematikken og ved at anvende den matematiske forståelse i en hverdagskontekst. Eksempelvis skal elever i PISA-undersøgelsen udregne den gennemsnitlige hastighed for en cyklist. Cyklisten kører fire kilometer de første 10 minutter og derefter to kilometer på fem minutter. Her gælder det for eleverne om at kunne anvende deres matematiske færdigheder og kundskaber på en hverdagsituation.

Mathematical literacy omfatter således basal matematisk tilegnelse, der er nødvendig for at kunne opstille og løse matematiske problemer i dagligdagen, bearbejde og fortolke data og/eller at vende matematik til at beskrive eller forudsige en udvikling eller en begivenhed.

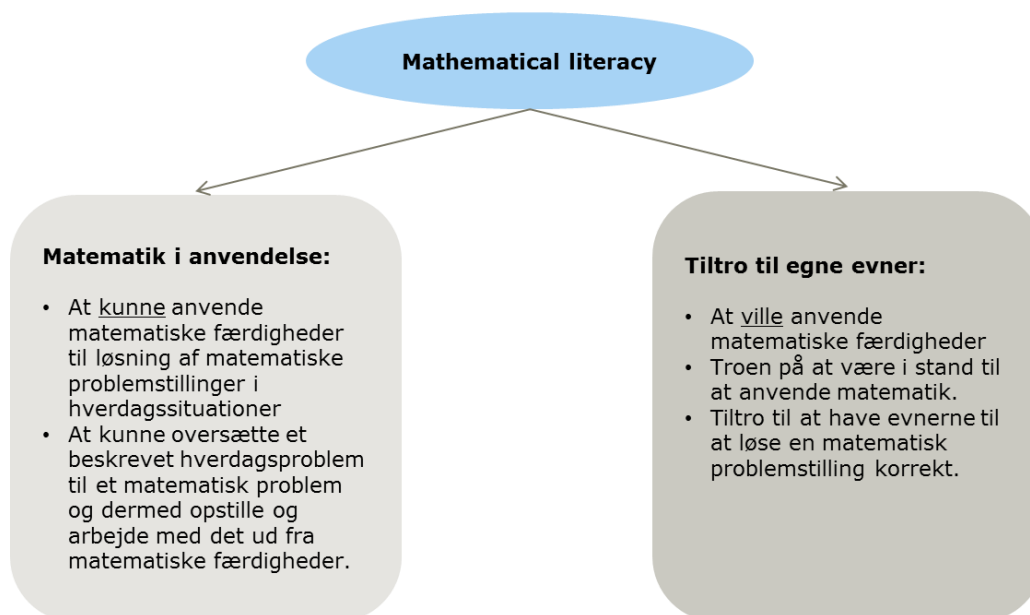
Samtidig handler *mathematical literacy* ud over at kunne også om at ville anvende de erhvervede matematiske færdigheder og kundskaber. Derfor indgår forskellige affektive variable i PISA-undersøgelsen og i matematikdidaktisk forskning. I indeværende oversigt indgår især elevernes tiltro til egne matematiske evner (ofte beskrevet med begrebet *self-efficacy*) som væsentlig for begrebet om *mathematical literacy*³.

Den todelte forståelse af *mathematical literacy* er illustreret i figuren nedenfor:

² Reviewspørgsmålet følger af Undervisningsministeriets udbudsmateriale.

³ PISA, 2012

Figur 1-1: Definition af mathematical literacy



Studier, der omhandler *mathematical literacy*, er i forskningen oftest rettet mod elever i grundskolen eller på ungdomsuddannelserne (Woodward et al., 2012; Carbonneau et al. 2013), og i begrænset omfang elever i dagtilbud (fx Reikerås et al., 2012). Dette er også afspejlet i de inkluderede studier.

En **reviewgruppe** har været tilknyttet arbejdet med kortlægningen og har bestået af lektor Lena Lindenskov fra Aarhus Universitet og lektor Charlotte Krog Skott fra UCC.

1.3 Læsevejledning

Ud over nærværende **indledning** indeholder denne rapport følgende tre kapitler:

- Kapitel 2 indeholder en beskrivelse af den anvendte **tilgang og metode** i den systematiske forskningskortlægning og -syntese. Gennemgangen skal skabe overblik over den systematik og transparens, der er anvendt i kortlægningen. Dokumentation i øvrigt findes i bilag.
- Kapitel 3 indeholder den **tematiske syntese** på tværs af de indhentede studier. På baggrund af fast strukturerede abstracts er der identificeret fem temaer, hvoraf de fire kobler sig til matematik i anvendelse og et enkelt til elevens tiltro til egne matematiske evner.
- Kapitel 4 indeholder en **tværgående opsamling** på den samlede kortlægning.

Bilagsmaterialet omfatter følgende:

- **Bilag 1** indeholder systematiske abstracts (sammenfatninger) af de studier, der er inkluderet i forskningskortlægningen. Her er det altså muligt at finde mere detaljerede beskrivelser af de studier, der udgør grundlaget for kortlægningen og syntesen.
- **Bilag 2** er et kortfattet metode- og designbilag, som uddyber en række af de begreber, som er anvendt i de systematiske abstracts.
- **Bilag 3** sammenfatter en række nøgleoplysninger, som er anvendt i screenings- og vurderingsprocesserne, herunder søgetermer og anvendte databaser mv.

2. TILGANG OG METODE

I dette kapitel beskrives den metodiske tilgang, som er anvendt til udarbejdelse af nærværende forskningskortlægning og – syntese. Beskrivelsen omfatter en præsentation af den overordnede tilgang samt de specifikke metodiske valg, som der er truffet undervejs. Nøgleord i arbejdet med kortlægning og syntese har været *systematik* og *transparens*, og nedenstående beskrivelse har til formål at dokumentere efterlevelsen heraf. Yderligere dokumentation for den anvendte metode findes i bilag.

2.1 Den overordnede tilgang

Til gennemførelse af forskningskortlægningen og -syntesen om *mathematical literacy* (herunder matematik i anvendelse og tiltro til egne matematiske evner) er der gjort brug af dels international litteratur og retningslinjer for gennemførelse af systematiske reviews og lignende undersøgelser⁴, dels konkrete erfaringer med litteraturstudier, kortlægninger og reviews gennemført af DCU og Rambøll i de senere år. Der er på den baggrund anvendt en metodisk tilgang, der både er internationalt anerkendt inden for forskningen samt appliceret i konkrete undersøgelser i dansk sammenhæng.

2.1.1 Den systematiske forskningskortlægning

Inden for review- og kortlægningstraditionen findes en række tilgange. Forskellige reviewtilgange kan placeres på et kontinuum, der spænder fra *litteraturstudier* over *Rapid Evidence Assessments (REA)* til *systematiske forskningskortlægninger* og endelig til et fuldt *systematiske review*.

Der er visse overlap mellem disse tilgange, men også markante forskelle. Overordnet er de væsentligste forskelle mellem de forskellige tilgange, dels hvor lang tid de tager at gennemføre, dels i hvor omfattende grad der arbejdes i bredden og dybden. Hermed skal forstås, hvor stor en del af det undersøgte forskningsområde der tages med i reviewet (bredden), og hvor dybdegående der arbejdes med forskellige processer af reviewet (dybden).

I denne kortlægning er valgt den tilgang, der bedst kan betegnes **den systematiske forskningskortlægning**. Denne reviewform er valgt med henblik på at kombinere styrkerne fra REA og systematiske reviews og dermed opnå en kortlægning med analytisk dybde, samtidig med at det har været nødvendigt at tage højde for projektets snævre tidsrammer. Eksempelvis tager det erfaringsmæssigt 9-12 måneder at gennemføre et fuldt systematisk review, og dette har ikke været muligt i denne kortlægning.

2.1.2 Den konfigurative, narrative syntese

Ligesom der findes forskellige tilgange til at indsamle og kortlægge eksisterende viden på et givent forskningsområde, findes der en række metoder til at kombinere, syntetisere og præsentere viden⁵.

Kortlægningen er baseret på en **konfigurativ syntesetilgang**. En konfigurativ tilgang er kendetegnet ved at organisere, udforske og finde mønstre i den viden, der er indsamlet i et givet review. Denne tilgang er hensigtsmæssig, når den indsamlede viden stammer fra studier, der er gennemført i forskellige sammenhænge og kontekster. Vigtigt er det at understrege, at denne tilgang ikke giver mulighed for at sammenligne effektstørrelser på tværs af studier eller reviews⁶.

Inden for den konfigurative tradition er nærværende kortlægning baseret på en **narrativ syntese** af de inkluderede studiers resultater. Den narrative syntese er velegnet til at håndtere studier

⁴ Jf. Gough et al.: *An introduction to systematic reviews*, London, Sage, 2012.

⁵ Jf. Thomas et al.: *Synthesis: Combining results systematically and appropriately*, i Gough et al.: *An introduction to systematic reviews*, London, Sage, 2012.

⁶ Den konfigurative tilgang står over for den aggregerende syntesetilgang, der anvendes, når på forhånd definerede teorier og hypoteser skal testes. Den aggregerende tilgang "lægger resultater sammen" fra enkeltstående studier, hvilket forudsætter, at en række forhold (fx forskningsdesign og effektskalaer) er sammenlignelige.

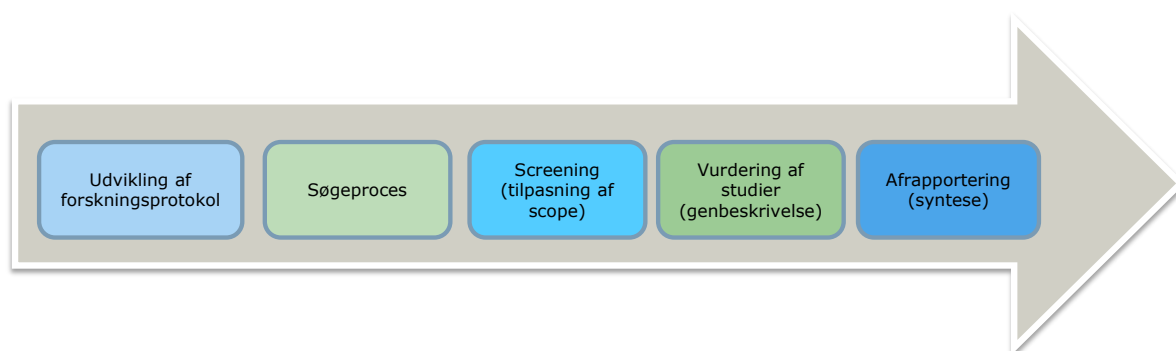
med forskellige forskningsdesign og indsatser gennemført i mange forskellige nationale og lokale kontekster.

2.2 Kortlægningens design og gennemførelse

Den systematiske forskningskortlægning er gennemført med afsæt i gængs praksis hos Dansk Clearinghouse for Uddannelsesforskning. I arbejdet er softwaren *EPPI-Reviewer4*⁷ anvendt. EPPI-Reviewer4 er særligt udviklet til at arbejde med systematiske reviews og er anvendt med henblik på både at sikre systematik og transparens i processen.

Overordnet er forskningskortlægningen tilrettelagt ud fra et undersøgelsesdesign, der indeholder fem faser. Nedenstående figur illustrerer de forskellige faser i processen.

Figur 2-1: Faser i undersøgelsesdesignet



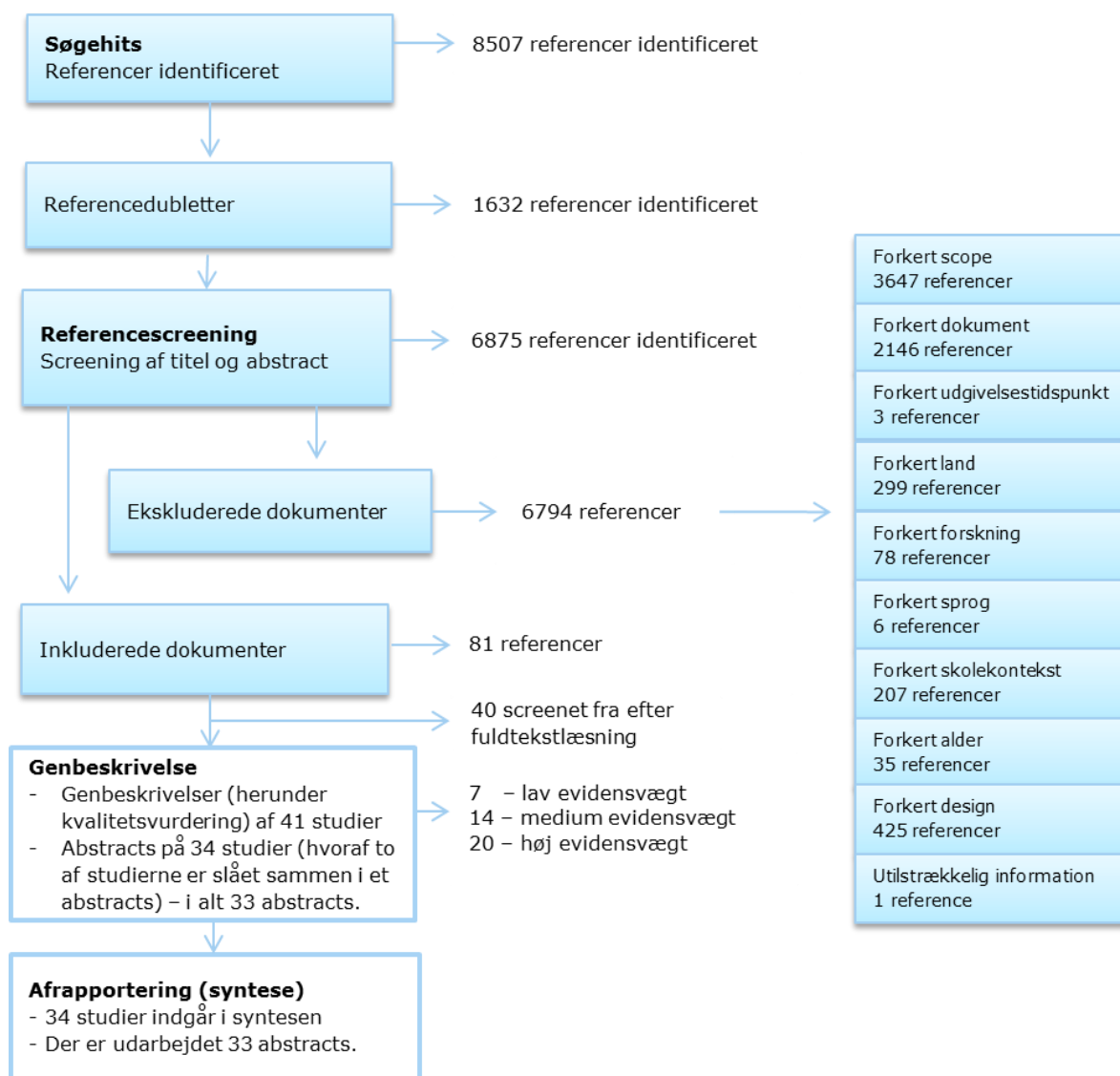
Som det fremgår af figuren blev forskningskortlægningen indledt med **udviklingen af en forskningsprotokol** med tilhørende reviewspørgsmål. I forbindelse med udviklingen af forskningsprotokollen blev der foretaget en række begrebsmæssige afgrænsninger, som udmøntede sig i en fastlæggelse af definitioner på forskningskortlægningens centrale begreb om *mathematical literacy* (jf. afsnit 1.2). Reviewspørgsmålet er det overordnede undersøgelsesspørgsmål, som forskningskortlægningen og – syntesen søger at besvare.

I næste fase blev en **systematisk søgeproces** iværksat. Her blev der gennemført en litteratursøgning i relevante forskningsdatabaser med afsæt i en række søgetermer, der afgrænsede søgningen (se bilag 3 for beskrivelse af databaser og søgetermer). I søgeprocessen er forskningskortlægningens tilknyttede reviewgruppe blevet inddraget med henblik på at komme med input til søgetermer og søgestrategi.

De tre øvrige faser i kortlægningen omfatter *screening*, *vurdering af studier* og *afrapportering/syntese*. Nedenfor er forskningskortlægningens forløb illustreret fra identificeringen af det samlede antal studier og dokumenter (i alt 8.507) til afrapporteringen i form af syntesen.

⁷ For en yderligere beskrivelse af EPPI-Reviewer4 henvises til producentens hjemmeside: <http://eppi.ioe.ac.uk/cms/>

Figur 2-2: Filtrering af referencer fra søgning til kortlægning



Som følge af den anvendte søgestrategi resulterede den indledende litteratursøgning i 8.507 identificerede referencer på tværs af de anvendte søgedatabaser. Da der var overlap mellem en del af de afsøgte databaser, var det nødvendigt at fjerne dubletter, så en given reference kun optrådte én gang. Der blev således fjernet 1.632 referencer, hvorved antallet af referencer blev reduceret til 6.875⁸.

Næste skridt i reviewprocessen var **screeningsfasen**. Her blev studierne gennemgået på deres titel og/eller abstract. Screening tog afsæt i en række inklusion-/eksklusionskriterier, hvorved der blandt andet blev screenet efter, om studierne faldt inden for den relevante tidsperiode, hvorvidt studierne indsats faldt inden for kortlægningens emnemæssige afgrænsning, om målgruppe, land, forskningsdesign mv. var relevant (se bilag 3). I denne proces blev 6.794 referencer ekskluderet. Det fremgår af figuren, på hvilket grundlag studierne blev ekskluderet samt antallet af studier i de forskellige eksklusionskategorier. Det skal bemærkes, at flere af studierne undervejs i processen er blevet placeret i kategorien *”utilstrækkelig information”*, såfremt det ikke har været muligt at ekskludere studiet på baggrund af de tilgængelige oplysninger. Først når der var blevet fremskaffet yderligere informationer om referencen, er studiet blevet henholdsvis inkluderet/ekskluderet. Det skal samtidig nævnes, at de ekskluderede studier kan være blevet ekskluderet på baggrund af flere eksklusionskriterier.

⁸ 2.390 af de 6.875 identificerede referencer er fundet gennem søgninger i nordiske databaser. Søgningen i de nordiske databaser har været relativt bred, hvilket har betydet, at langt størstedelen af den nordiske litteratur ikke har været relevant for denne kortlægning.

Dernæst blev **genbeskrivelsesfasen** iværksat. Her blev de nu 81 inkluderede studier gennemgået i deres helhed (fuldtekstslæsning). Ved gennemlæsning af studierne i fuld tekst viste det sig, at 40 studier ikke mødte inklusionskriterierne for nærværende kortlægning, hvorfor de blev screenet fra. Frascreeningen af den relativt store mængde litteratur skyldes primært, at studierne ikke omhandler *mathematical literacy*, som defineret indledningsvist, men i stedet har fokus på klassiske regnefærdigheder (fx udregning af plus/minus, gangestykker, brøker mv.).

De 41 inkluderede studier blev genbeskrevet og herunder kvalitetsvurderet i EPPI-Reviewer. Genbeskrivelsessystemet i EPPI-Reviewer indeholder en række almene og specifikke reviewspørgsmål. **Reviewspørgsmål** vedrører studiernes formål, stikprøvestørrelse, geografisk oprindelse og sprog samt spørgsmål vedrørende design, metode og transparens. Reviewspørgsmålene vedrører ydermere studiernes forskningsmæssige kvalitet og relevans.

På baggrund af den systematiske genbeskrivelse og kvalitetsvurdering blev hvert enkelt studie tildelt en samlet evidensvægt – henholdsvis høj, medium eller lav. Den samlede evidensvægt beror på en systematisk vurdering af studiernes forskningsmæssige (og rapporteringsmæssige) **kvalitet** og **relevans** i relation til forskningskortlægningens reviewspørgsmål (denne del af processen beskrives nærmere i afsnit 2.3.2). I genbeskrivelsesprocessen blev 7 studier tildelt lav evidensvægt, mens 34 studier blev tildelt høj/medium evidensvægt. Det bemærkes, at alle **41 studier** er en del af den **systematiske forskningskortlægning**, men det er udelukkende de **34 studier**, der har fået medium/høj evidensvægt, som indgår i syntesen.

Cirka halvdelen af studierne i denne kortlægning vurderes at have høj evidensvægt. Det gælder 20 ud af de 41 inkluderede studier. I tildelingen af evidensvægten har der været stor opmærksomhed på ikke at overvurdere studiernes forskningsmæssige kvalitet. Det vurderes, at de studier der lever op til forskningskortlægningens inklusionskriterier generelt er af høj kvalitet. I denne kortlægning er RCT-studier med lille n (ned til 30) blevet accepteret, idet en del af de inkluderede randomiserede, kontrollerede forsøg benytter sig af en lille stikprøvestørrelse. Kortlægningen indeholder derfor studier, der er baseret på randomiserede, kontrollerede forsøg med stikprøvestørrelser ned til 30 elever samlet i indsats-, kontrol- og eventuel sammenligningsgruppe. Det gælder ikke for studier baseret på kvasi-eksperimentelle designs, som er blevet inkluderet ved stikprøvestørrelse højere end 60 elever.

Forskningskortlægningens sidste fase indebar i første omgang en **afrapportering** i form en række **faststrukturerede abstracts**. Abstracts blev udarbejdet sideløbende med genbeskrivelsen og kvalitetsvurderingen og indeholder beskrivelser af studiernes forskningsdesign og stikprøvestørrelse, beskrivelser af indsatserne i studierne og analysemetoder samt beskrivelser af studiernes resultater/effekter. Der blev udarbejdet **33 abstracts** for de 34 studier, som blev tildelt høj/middel evidensvægt. Det bemærkes, at to af studierne er beskrevet i ét abstract, hvorfor der indgår 33 abstracts i syntesen. Det skyldes, at de to studier er skrevet af samme forfatter (Jitendra et al., 2009; Jitendra og Star, 2011), og at data i det seneste studie stammer fra studiet af samme forfatter fra 2009. Samtlige abstracts fremgår i bilag 1.

Næste skridt i afrapporteringsfasen var gennemførelsen af en **tematisk analyse** af de 34 studier. Mere specifikt indebar denne del af processen, at der på baggrund af en gennemlæsning og analyse af de 34 undersøgelser blev identificerede en række temaer, som viste sig på tværs af studierne. I alt er der identificeret **fem temaer** på tværs af litteraturen, som relaterer sig til *mathematical literacy*. Temaerne kobler sig til kortlægningens todelte fokus, som er beskrevet indledningsvist og er derfor struktureret herefter. Således er der identificeret **fire temaer**, der beskæftiger sig med indsatser, som har fokus på *matematik i anvendelse* og **ét tema**, der ser på indsatser med fokus på *elevers tiltro til egne matematiske evner*. Dette uddybes yderligere i kapitel 3, hvor afrapporteringen tager form af en narrativ syntese.

2.3 Karakteristik af den indsamlede viden

I nedenstående gives en overordnet karakteristik af den indsamlede forskningsviden. Dette omfatter en kort beskrivelse af studierne geografiske spredning, de anvendte forskningsdesign, samt hvilke aldersgrupper studierne omfatter og studierne fokus. Dernæst følger en beskrivelse af kvalitetsvurderingen af studierne og bestemmelsen af evidensvægt.

2.3.1 Generel karakteristik

Forskningskortlægningen om *mathematical literacy* bygger overordnet set på et relativt stærkt forskningsgrundlag. De fleste af de inkluderede studier benytter sig af eksperimentelle forskningsdesigns (kvasi-eksperimentelle og randomiserede, kontrollerede forsøg), men stikprøvestørrelserne varierer betydeligt. Kun ét systematiske review er inkluderet.

Forskningen er overvejende international, med en markant overvægt af studier fra USA. Det skal pointeres, at det har været et opmærksomhedspunkt at inkludere nordisk forskning, hvorved der eksempelvis har været mere lempelige designkriterier for den nordiske forskning sammenlignet med den internationale forskning (se bilag 2). Alligevel har det kun været muligt at inkludere tre nordiske studier i syntesen, idet den øvrige nordiske litteratur ikke lever op til kortlægningens inklusionskriterier.

I kortlægningen er der opstillet en række inklusionskriterier vedrørende studierne geografi og sprog. Geografisk grupperes studierne overordnet som henholdsvis international eller nordisk forskning. Under den internationale forskning er følgende lande inkluderet: EU-lande (Norden undtaget), Schweiz, USA, Canada, Australien og New Zealand. Under nordisk forskning er henholdsvis Danmark, Norge, Sverige og Finland inkluderet. Forskning, der er gennemført i andre lande end de omtalte, inkluderes ikke i forskningskortlægningen. Forskningskortlægningens sproglige univers omfatter engelsk, dansk, norsk og svensk.

Nedenstående tabel viser, hvor mange af studier der er henholdsvis internationale og nordiske.

Tabel 2-1: Antal internationale og nordiske studier

Undersøgelseskontekst	Antal studier
International	38
Nordisk	3

N = 41

Som det fremgår af tabellen, er hovedparten af de i kortlægningen inkluderede studier baseret på international forskning. Det gælder i alt 38 studier, mens tre af studierne er nordiske.

Nedenstående tabel viser studierne fordeling på lande.

Tabel 2-2: Studiernes fordeling på lande

Undersøgelsesland	Antal studier
Sverige	3
Canada	1
USA	27
Storbritannien	1
Tyskland	1
Holland	3
Frankrig	1
Italien	1
Skotland	1
Cypern	1
Ikke oplyst	1

N = 41

Tabel 2-2 viser studiernes geografiske dækning. Langt størstedelen af studierne er gennemført i USA. Det gælder for 27 af studierne. Derudover er der gennemført tre studier i henholdsvis Sverige og Holland. I hvert af de øvrige lande, der udgøres af henholdsvis Canada, Storbritannien, Tyskland, Frankrig, Italien, Skotland og Cypern, er der gennemført et enkelt studie.

Nedenstående tabel viser de anvendte forskningsdesign i de 41 studier, der er inkluderet i kortlægningen. Der henvises til metodebilaget i bilag 2 for en nærmere beskrivelse af de enkelte forskningsdesign.

Tabel 2-3: Studiernes forskningsdesign

Forskningsdesign	Antal studier
Systematisk review/metaanalyser	3
Randomiseret, kontrolleret forsøg (RCT)	19
Kvasi-eksperimentelt	18
Andre	1 ⁹

N = 41

Som tabellen viser, er hovedparten af studierne baseret på eksperimentelle design¹⁰. Heraf er halvdelen af disse baseret på randomiserede, kontrollerede forsøg. Det gælder for i alt 19 studier, mens der er 18 studier med kvasi-eksperimentelle forskningsdesign. Derudover er der tre systematiske reviews. Dertil er ét studie, der er baseret på et etnografisk studie.

Nedenstående tabel viser, hvilken kontekst studierne omfatter.

⁹ Studiet i denne kategori er et nordisk, etnografisk studie (Ordell og Eldholm, 2003).

¹⁰ Der indgår ingen studier i syntesen, som er baseret på kvalitative design. Det skyldes det primære fokus for indeværende kortlægning, der medfører, at det væsentligste inklusionskriterium er, at relevante studier behandler metoder og indsatser, der har *effekt på* eller *betydning* for elevernes *mathematical literacy*. De kvalitative studier, der er blevet identificeret i søgeprocessen, er blevet frasortet igen under screeningen, fordi studierne netop ikke belyser metoder og indsatser effekt på eller betydning for *mathematical literacy*. De ekskluderede kvalitative studier er generelt kendetegnede ved at være rene deskriptive analyser, der ikke belyser virkningsfulde mekanismer.

Tabel 2-4: Studiernes kontekst

Kontekst	Antal studier
Dagtilbud	2
Grundskole	28
Ungdomsuddannelse (gymnasium mv.)	4

N = 33 abstracts

* Ét studie er talt med alle tre steder, idet det er et systematisk review på tværs af de tre kontekster.

Som det fremgår af tabellen, er hovedparten af studierne undersøgt i en grundskolekontekst. Det gælder for i alt 28 studier, mens konteksten i to af studierne omfatter dagtilbud og i fire studier omfatter en ungdomsuddannelse.

Nedenstående tabel viser, hvilket fokus studierne har. Studiernes fokus skal forstås som, hvilke variable indsatserne i studierne søger at påvirke, dvs. studierne effekt mål. I nærværende kortlægning vil der, som tidligere beskrevet, være tale om henholdsvis *matematik i anvendelse* og *elevers tiltro til egne matematiske evner*.

Tabel 2-5: Studiernes fokus

Fokusområde	Antal studier
Matematik i anvendelse	29
Tiltro til egne evner	8

N = 34 (inkluderede studier i syntesen).

* Tabellens tal summerer til 37, da tre af studierne placerer sig i begge kategorier. Derudover er der to studier, som er slået sammen til ét abstract.

Der er 29 studier, der har fokus på matematik i anvendelse, mens otte studier ser på elevernes tiltro til egne matematiske evner.

2.3.2 Vurdering af studierne forskningskvalitet og evidensvægt

Processen i kvalitetsvurderingen af studierne og tildeling af evidensvægt beror på den systematiske fremgangsmåde i EPPI-Reviewer, der er beskrevet ovenfor. Dog skal det pointeres, at selve kvalitetsvurderingen og tildeling af evidensvægt i sidste ende er baseret på en *vurdering*. Dette adskiller sig fra den øvrige proces i kortlægningen, hvor fokus er på *at lade litteraturen tale* (se fx de udarbejdede abstracts i bilag 1). Således er der i kvalitetsvurderingen og tildeling af evidensvægt tale om en *vurdering* frem for blot en *beskrivelse* af forskningens data.

Vurderingen af studierne forskningskvalitet og – relevans er baseret på tre forskellige evidensvurderinger, der tilsammen danner grundlag for tildeling af studierne samlede evidensvægt. De tre evidensvurderinger, der fører frem til i den samlede evidensvægt, er henholdsvis:

- **Evidensvægt A** der vedrører studiets metodiske forskningskvalitet og derved relaterer sig til en vurdering af pålideligheden af primærstudiets resultater på baggrund af de videnskabeligt accepterede normer for det anvendte forskningsdesign.
- **Evidensvægt B** der vedrører studiets metodiske relevans og derved en vurdering af hensigtsmæssigheden af det anvendte design i primærstudiet i forhold til den problemstilling, der er i fokus i den systematiske forskningskortlægning.
- **Evidensvægt C** der vedrører studiets emnemæssige relevans og derved en vurdering af hensigtsmæssigheden af studiets fokus i forhold til den problemstilling, der er i fokus i den systematiske forskningskortlægning. Det handler om at vurdere, i hvilken grad problemstillingen i den systematiske forskningskortlægning berøres perifert eller centralt i primærstudiet.

Et studie vurderes til at have **høj evidensvægt**, når studiet både er af høj forskningskvalitet og relevans. Mere specifikt indebærer dette, at studiet skal være gennemført i overensstemmelse med de gældende videnskabelige krav *inden for det anvendte design* og såvel emnemæssigt som forskningsdesignmæssigt behandle kortlægningens reviewspørgsmål centralt. Når et eller flere af

de nævnte forhold ikke er opfyldt i *tilstrækkelig grad*, vurderes studiet med **medium evidensvægt**. Såfremt mange af de ovennævnte forhold ikke er opfyldt, og der derved ikke kan fæstes lid til studiets resultater, vurderes studiet med **lav evidensvægt**.

Det er vigtigt at understrege, at studier, der er blevet tildelt en høj evidensvægt, fortsat kan være kendetegnet ved enkelte metodiske eller analytiske opmærksomhedspunkter. På et overordnet plan er studierne dog af en meget høj forskningsmæssig kvalitet, og usikkerheden omkring studiernes resultater er derfor minimale. Studier tildelt en medium evidensvægt kan derimod have flere metodiske eller analytiske mangler. Der kan fortsat fæstnes lid til studiernes resultater, men usikkerhedsmarginen er større end i studierne med høj evidensvægt. Eksemplet i nedenstående boks illustrerer forskellen mellem studier, der er blevet tildelt høj hhv. medium evidensvægt. Eksemplet er vejledende, idet kvalitetsvurderingerne, som tidligere nævnt, beror på en vurdering af det enkelte studies forskningsmæssige kvalitet, og det er derfor svært at opstille generiske grænseværdier mellem høj og medium evidensvægt.

Boks 2-1: Eksempel på tildeling af evidensvægt

	Griffin, Cynthia C. & Asha K. Jitendra: <i>Word Problem-Solving Instruction in Inclusive Third-Grade Mathematics Classrooms</i>	Mason, Lucia & Luisa Scrivani: <i>Enhancing Students' Mathematical Beliefs: An Intervention Study</i>
Design	Kvasi-eksperimentelt design	RCT
Stikprøvestørrelse	60	86
Evidensvægt	Høj	Medium
Begrundelse*	<ul style="list-style-type: none"> • Stor gennemsigtighed i forhold til anvendte teorier, metoder og resultater • Veludført og velbegrundet forskningsdesign • Kontrol for relevante baggrundsfaktorer • Ligelig fordeling af elever i de to indsatsgrupper • Fokus i studiet er på, at elever skal tilegne sig kompetencer indenfor matematisk problemløsning. Matematisk problemløsning er hovedoutcomemål. 	<ul style="list-style-type: none"> • Stor gennemsigtighed i forhold til anvendte teorier, metoder og resultater • Veludført og velbegrundet forskningsdesign • Kontrol for relevante baggrundsfaktorer • Næsten ligelig fordeling af elever i de to indsatsgrupper • Studiets hovedfokus er ikke udelukkende på matematik, men der måles på matematik som ét blandt mange outcomemål.

* Dækker over de væsentligste begrundelser for tildelingen af evidensvægt specifikt for disse to studier. Kategorien er *ikke* udtømmende.

Det skal fremhæves, at kvalitetsvurderingen af forskningens resultater udelukkende tager afsæt i studiernes beskrivelser. Det betyder, at kvalitetsvurderingen og bestemmelse af evidensvægt i høj grad afhænger af afrapporteringen i studierne. Det er således en forudsætning for, at et studie kan tildeles høj eller medium evidensvægt, at studiet er afrapporteret med tilstrækkelig gennemsigtighed og indeholder information om studiets forskningsspørgsmål, metodiske fremgangsmåde, stikprøvestørrelse, dataindsamlings- og analysestrategier og resultater. Derudover indgår det, hvorvidt studiet har høj eller medium relevans for at besvare indeværende kortlægning, hvor studier der har medium relevans for indeværende kortlægning ikke kan få en samlet høj evidensvægt.

Nedenstående tabel viser antallet af studier fordelt på kortlægningens tre evidensvægte samt studiernes samlede evidensvægt.

Tabel 2-6: Studiernes evidensvægt

Evidensvægt	Antal studier
Lav	7
Medium	14
Høj	20

N=41

Størstedelen af de inkluderede studier i indeværende kortlægning vurderes at have medium eller høj evidensvægt. Der er altså tale om studier af relativt solid metodisk karakter. 20 af de inkluderede studier vurderes at have høj evidensvægt, 14 vurderes at have medium evidensvægt, mens syv har lav evidensvægt. Som tidligere nævnt, indgår de syv studier, som vurderes at have lav evidensvægt ikke i syntesen.

3. TEMATISK SYNTSE

I dette kapitel præsenteres kortlægningens *narrative, tematiske syntese*, der består af i alt fem temaer. Temaerne repræsenterer forskellige indsattstyper, aktiviteter og tilgange til matematikundervisning, med henblik på at elever tilegner sig *mathematical literacy*. Det gælder både i relation til at kunne anvende matematiske færdigheder til løsning af matematiske problemstillinger i hverdagsituationer og at kunne oversætte et beskrevet hverdagsproblem til et matematisk problem og dermed opstille og arbejde med det ud fra matematiske færdigheder. Men det gælder også i relation til at ville anvende og tro på at kunne anvende *mathematical literacy*. Temaerne opridses kort nedenfor:

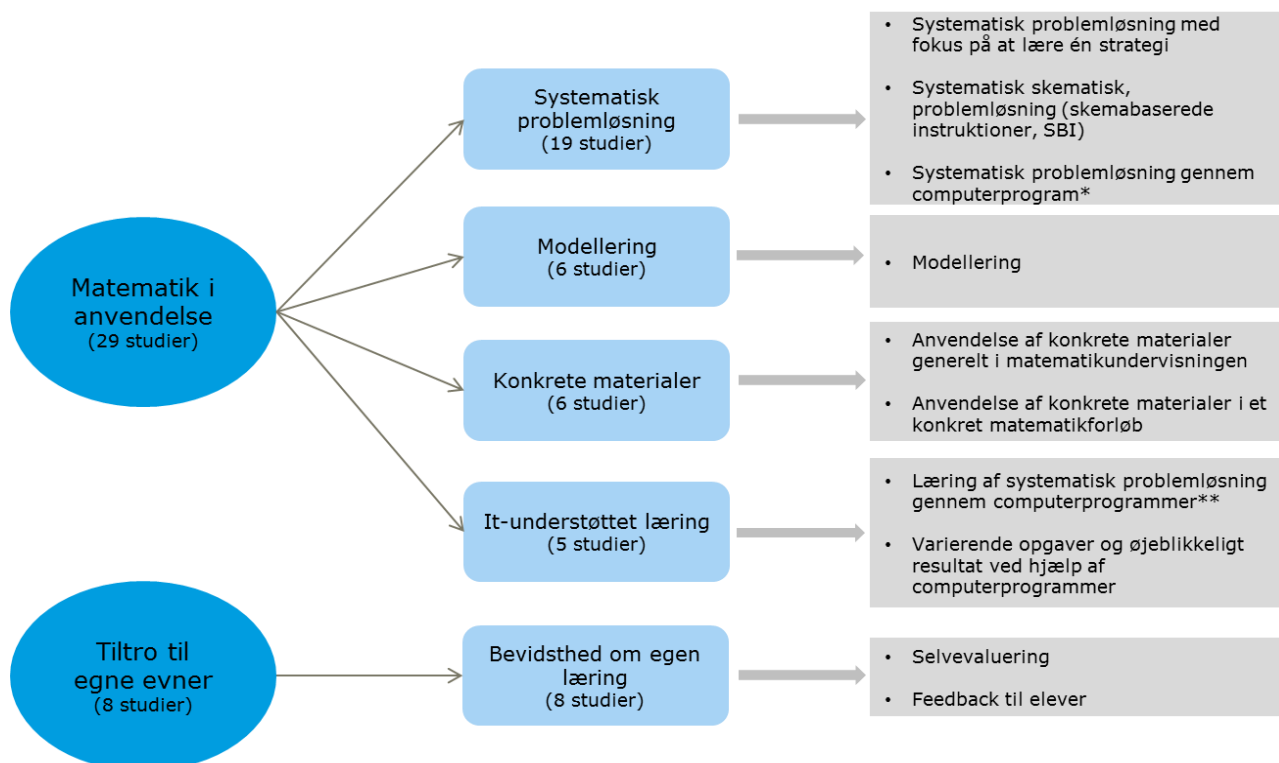
- Det **første tema** handler om **systematisk problemløsning** og omfatter en række studier, der sætter fokus på, at elever skal anvende en systematisk og delvist skematisk tilgang til løsning af matematiske problemer. Tilgangen består overordnet af, at eleverne skal lære at benytte sig af en metakognitiv¹¹ strategi med en række fast definerede og forbundne faser/trin, som kan hjælpe problemløsningsprocessen på vej for eleverne. Strategierne skal ikke forstås som et sæt af generelle regler for, hvordan et givent problem løses, idet strategierne ikke løser problemet for eleven, men i stedet giver dem redskaber til at udtænke den gode idé til løsning af problemet.
- Kortlægningens **andet tema** omhandler **modellering** og dækker over, at eleverne skal løse matematiske problemstillinger af omverdenskarakter. Temaet beror på, at eleverne selv skal udvikle og finde den løsningsstrategi, de bedst kan anvende i løsningen af matematiske opgaver. Fokus er derfor, at eleverne *på egen hånd* udtænker løsningsstrategier og arbejder med præsentationen af disse gennem modellering af løsningen.
- Det **tredje tema** præsenterer de studier, som ser på brugen af **konkrete materialer**, både i matematikundervisningen generelt og i mere faste undervisningsforløb. Temaet indeholder en række studier, der sætter fokus på en undervisningsform, hvor eleverne skal anvende konkrete materialer, der illustrerer matematikken og giver eleverne *hands-on*-erfaring med matematik.
- Det **fjerde tema** sætter fokus på **it-understøttet læring**. Studierne i temaet belyser, at man ved brug af it-baserede programmer har muligheder for forholdsvis enkelt at individualisere undervisningen således, at den imødekommer den enkelte elevs behov og kan sikre hurtig og umiddelbar feedback til den enkelte elev.
- Det sidste og **femte tema** behandler **bevidsthed om egen læring** og ser på, hvordan man via selvevaluering og løbende feedback kan forbedre elevs tiltro til egne matematiske evner. Temaet omfatter studier, der fokuserer på, at eleverne skal vurdere, reflektere og evaluere deres egne matematiske færdigheder og kompetencer inden for problemløsning og dermed blive bevidste om egen læring og læringsprocesser.

Nedenfor i figuren er temaerne illustreret i overblikksform. Her ses det, at fire temaer – illustreret ved de øverste **lyseblå** bokse – kobler sig til fokusområdet om *matematik i anvendelse*, mens et enkelt tema – illustreret ved den nederste **lyseblå** boks – kobler sig til *elevers tiltro til egne matematiske evner*. De **grå** bokse længst til højre viser de mekanismer/aktiviteter, der er beskrevet inden for temaet. Det fremgår også af boksene og cirklerne i figuren, hvor mange af de inkluderede studier, der indgår i hvert tema. Det er vigtigt at understrege, at temaerne ikke er gensidigt udelukkende. I de fleste tilfælde vil temaerne være kendetegnet ved flere fælles træk, ligesom

¹¹ At anvende metakognitive strategier betyder, at gøre eleverne mere opmærksomme på, hvad de gør, når de skal løse matematiske problemstillinger, og hvorfor problemstillingerne skal løses på den måde, samt hvad de skal gøre, når de kommer i vanskeligheder med at løse den matematiske problemstilling.

nogle af indsætterne beror på de samme virkningsfulde mekanismer og delkomponenter. Flere af studierne går således også igen i de forskellige temaer.

Figur 3-1: Overblik over temaer i kortlægningen



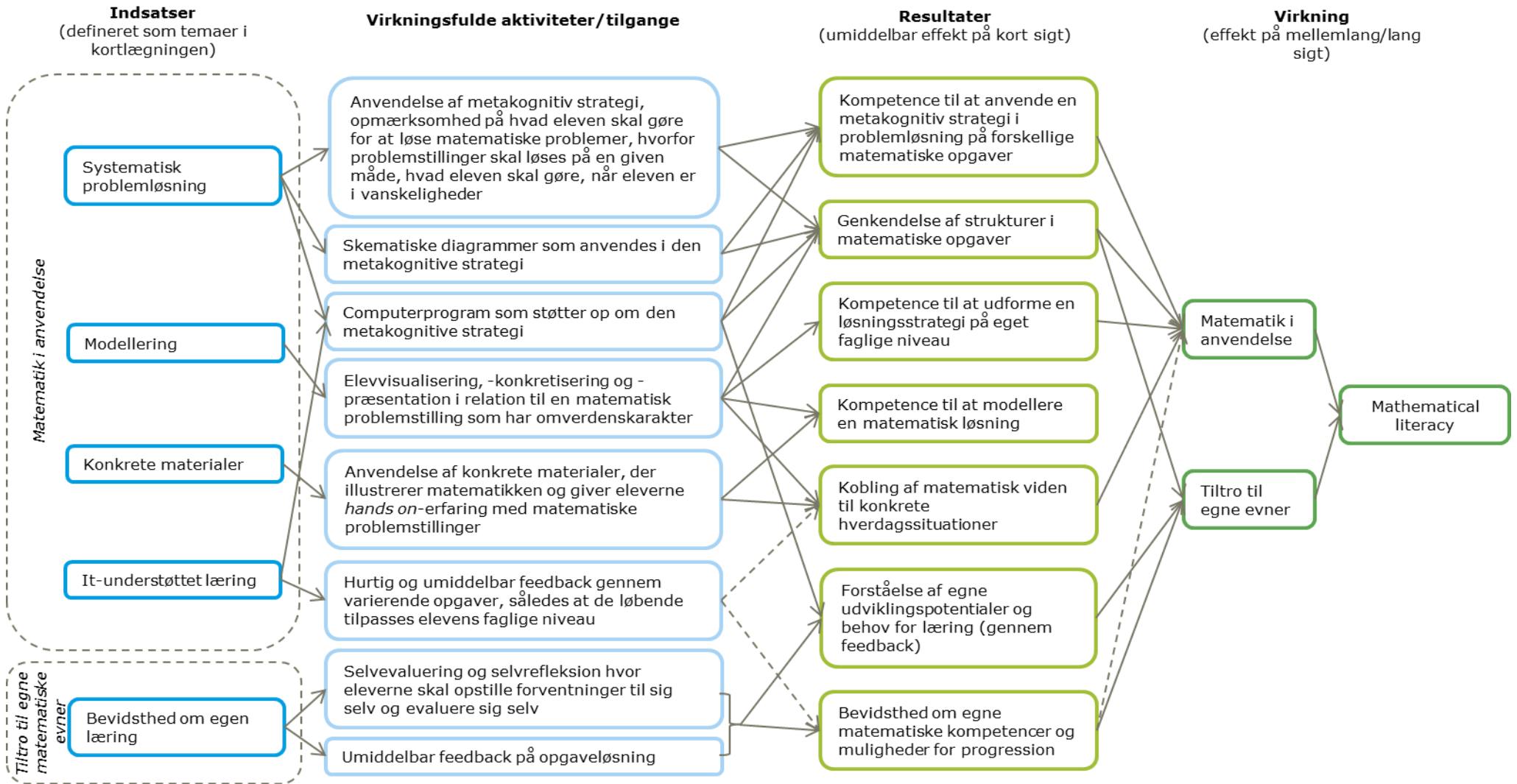
* Fokus i dette afsnit er på den strategi, som eleverne præsenteres for i relation til elevernes løsning af matematiske problemer. Computerprogrammerne er her en del af strategien.

** Fokus i dette afsnit er på computerprogrammernes funktion som et redskab i undervisningen i elevernes løsning af matematiske problemer. Programmet kan give hurtig feedback og "fastholde" eleverne på de forskellige trin i den strategiske tænkning.

Som figuren viser, er der i alt identificeret **fem temaer** på tværs af studierne, som relaterer sig til *mathematical literacy*. Temaerne er koblet til kortlægningens todelte fokus, som er beskrevet indledningsvis, og er derfor struktureret herefter.

I figuren nedenfor præsenteres kortlægningens overordnede forandringsteori. Forandringsteorien er opstillet på baggrund af de virkningsfulde mekanismer, som kortlægningen har identificeret, og de enkelte trin i forandringsteorien udfoldes mere udførligt under figuren og i resten af syntesen.

Figur 3-2: Overordnet forandringsteori (kortlægningens kausalforståelse)



* Den stiplede linje illustrerer, at der i enkelte studier er fundet en sammenhæng, men at denne sammenhæng ikke er veldokumenteret i flere studier.

Forandringsteorien har til formål at beskrive sammenhænge mellem aktiviteter/indsatser (defineret under kortlægningens temaer) og resultater/effekter på elevernes *mathematical literacy*. Forandringsteorien kan alt andet lige kun præsenteres på et overordnet niveau og yder ikke retfærdighed til de årsagssammenhænge, der er beskrevet og præsenteret i de enkelte studier. Sammenhængene, der er præsenteret i forandringsteorien, repræsenterer således ikke nødvendigvis lige stærke sammenhænge, men er udelukkende et udtryk for, at der i kortlægningen er fundet en sammenhæng.

Det fremgår af forandringsteorien, at der generelt for alle fem temaer gælder, at der kan påvises en positiv effekt af indsatserne på elevernes *mathematical literacy*, når man anvender en eller flere af de nævnte aktiviteter/tilgange. Langt hovedparten af de identificerede, virkningsfulde indsatser består af en række delelementer, hvis effekter på elevernes *mathematical literacy* ikke kan isoleres. Endelig skal det præciseres, at forandringsteorien alene afspejler de studier, der har vist effekt. For en nærmere beskrivelse af de studier, der *ikke* har vist effekt, henvises til beskrivelsen af de enkelte temaer nedenfor.

Nedenfor præsenteres de fire temaer inden for matematik i anvendelse. Herefter følger en præsentation af temaet inden for elevernes tiltro til egne matematiske evner. Hvert tema indledes i det følgende med en skematisk præsentation af de studier, der relaterer sig til det enkelte tema. Præsentationen efterfølges af en kort karakteristik af forskningen på det givne område. Herefter følger en tværgående behandling af indsatser og lignende, der falder ind under de enkelte temaer. Afslutningsvis præsenteres de virkningsfulde mekanismer og særlige implementeringsforhold, der er identificeret som led i kortlægningen. Mere detaljerede beskrivelser af de enkelte indsatser kan findes i bilag 1, der indeholder abstracts af alle de inkluderede studier i kortlægningen.

MATEMATIK I ANVENDELSE

3.1 Systematisk problemløsning

En række studier i indeværende kortlægning kan grupperes under temaet **systematisk problemløsning**. Fælles for disse studier er, at de alle undersøger effekten på elevernes matematiske kompetencer indenfor enten problemløsning og/eller evner til at overføre viden fra en kontekst til en anden kontekst (*transfer*) af, at elever lærer en metakognitiv strategi til problemløsning. Den metakognitive strategi har til hensigt at give eleverne redskaber til at gribe problemløsningen systematisk og delvist skematisk an.

Karakteren og omfanget af de studier, som falder ind under dette tema varierer, men fælles for indsatserne i studierne er, at eleverne af deres matematiklærer bliver præsenteret for en systematisk tilgang gennem metakognitive strategier til at løse matematiske problemstillinger, som eleverne dernæst skal anvende i deres problemløsning.

Der er identificeret **19 studier** i forbindelse med kortlægningen, som relaterer sig til temaet om systematisk problemløsning. Studierne er fremstillet skematisk i oversigtstabellen nedenfor og beskrives mere udførligt i resten af afsnittet. I tabellen er der ligeledes angivet, hvorvidt outcomemålet er målt med en test, der enten er standardiseret eller forskergenereret. Der er flere af de inkluderede studier, som er udgivet af den samme forfatter (Jitendra)¹², men forskelle i indsats, studiedesign og antal af elever betyder, at studierne rapporteres enkeltvist.

¹² To af studierne, henholdsvis Jitendra et al., 2009, og Jitendra & Star, 2011, er slået sammen, da det fremgår eksplicit i Jitendra & Star, 2011, at data fra deres artikel kommer fra Jitendra et al., 2009, hvorfor det er den originale artikel, der er medtaget.

Tabel 3-1: Tabel over studier tilhørende temaet om systematisk problemløsning, i alt 19 studier

Studie	Land	Indsats	Målgruppe	Omfang	Fagpersoner	Outcomemål	Stikprøvestørrelse	Design
Bottge et al. (2004)	USA	To undervisningsmetoder i henholdsvis systematisk problemløsning og mere virkelighedsnær problemløsning, hvor eleverne selv skal konstruere en model og løsning	Elever med og uden særlige behov	Fase 1: 1 uge Fase 2: 6, 11 og 22 uger efter fase 1. Varigheden af fase 2 er ikke nærmere præciseret	Lærer (matematik)	Matematiske færdigheder (brøkgregning) og problemløsningsevne (hhv. en tekstbaseret og en videobaseret test) (forsker-genereret)	93 elever i 6. klasse Indsats: n= * Kontrol: n= *	Kvasi-eksperiment
Bryant et al. (2001)	USA	Fremme elevernes matematiske færdigheder gennem en undervisningsrutine, der består af en guidende praksis og en selvstændig praksis	Elever med særlige behov	11 undervisningsenheder bestående af hver 8 dage med 2 lektioner om dagen a 10 minutters varighed	Lærer (matematik)	Matematisk progression, problemløsningsfærdigheder (standardiseret test)	204 elever i 1. klasse Indsats: n= 139 Kontrol: n= 65	Randomiseret, kontrolleret forsøg
Fede (2010)	USA	Undervisningsforløb i et computerbaseret undervisningsprogram i matematik, der lægger særlig vægt på systematisk problemløsning (skemabase-rede instruktioner)	Elever med særlige behov	12 uger, 45 minutter 2 gange om ugen	Lærer (matematik, som normalt anvender computerprogrammet)	Matematiske færdigheder (MCAS og GMADE ¹³) (standardiserede test), frem-skrift samt angst for matematik (forsker-genereret test)	32 elever i 5. klasse Indsats: n= 16 Kontrol: n=16	Randomiseret, kontrolleret forsøg
Fuchs et al. (2004)	USA	Undervisningsforløb i systematisk problemløsning med og uden kategorisering af problemtyperne	Elever med og uden særlige behov	3 ugers introduktion til generel problemløsning. Derefter 4 gange 3 ugers forløb, bestående af hver 6 lektioner, ca. 30-40 minutter	Lærer (matematik)	Matematisk problemløsning (forsker-genereret) og transfer (valideret med standardiseret test)	366 elever i alderen 8 til 9 år SBI-indsatsen: n= 127 SBI med kategorisering af problemer: n= 126 Sammenlignings-gruppe: n= 113	Kvasi-eksperiment
Fuchs et al. (2006)	USA	Undervisningsforløb med fokus på systematisk problemløsning (SBI) med eller uden eksplicit instruktion i at anvende strategier til at tackle dagligdags matematiske problemer	Elever i 3. klasse	3 ugers introduktion til generel problemløsning. Derefter 4 gange 3 ugers forløb, bestående af hver 7 lektioner, ca. 30-40 minutter	Lærer (matematik)	Matematisk problemløsning (forsker-genereret) og transfer (valideret med standardiseret test)	445 elever i 3. klasse SBI: n=148 SBI med hverdagsproblematikker: n=153 Kontrol: n=144	Randomiseret, kontrolleret forsøg

¹³ MCAS er *The State Mathematic Assessment test, Massachusetts Comprehensive Assessment System*, og GMADE er *The Group Mathematics and Diagnostic Evaluation*. Hvor der testes følgende: *Concepts and communication, Operations and computations, and Process and applications*.

Studie	Land	Indsats	Målgruppe	Omfang	Fagpersoner	Outcomemål	Stikprøvestørrelse	Design
Gamo et al. (2010)	USA	Træningsforløb med fokus på sproglige faktoreres betydning for valget af en problemløsningsstrategi, herunder hvilken betydning det har at træne dette, således at man kan overføre problemløsnings-tilgangen fra en kontekst til en anden kontekst (transfer)	Elever i 4. og 5. klasse	2-dages træningsforløb	Lærer (matematik) eller forsker	Transfer (forskergenereret)	435 elever i 4. og 5. klasse Første eksperiment: Indsats: n= 193 Kontrol: n=68 Andet eksperiment: Indsats: n=174	Kvasi-eksperiment
Griffin & Jitendra (2009)	USA	Undervisningsforløb i 2 forskellige former for systematisk problemløsning. Skemabaseret problemløsning (<i>Schema-based instruction, SBI</i>) og generel strategisk tilgang til problemløsning (<i>General strategy instruction, GSI</i>)	Elever i 3. klasse	Begge indsætter forløber over 32 lektioner	Lærer (matematik)	Matematisk tekstbaseret problemløsning (forskergenereret), progression i læring (forskergenereret), regnefærdigheder (forskergenereret)	60 elever i 3. klasse SBI indsats: n=30 GSI indsats: n=30	Kvasi-eksperiment
Harskamp & Suhre (2007)	Holland	Et undervisningsforløb med et computerprogram, der er udarbejdet på baggrund af Schoenfelds teori om systematisk problemløsning	Gymnasieelever	14 lektioner a 50 minutter fordelt på 3 perioder af 2 uger	Lærer (matematiklærer uden erfaring med computerprogrammet)	Matematisk problemløsning (forskergenereret)	198 gymnasieelever Indsats: n = 91 Kontrol: n = 107	Kvasi-eksperiment
Jitendra et al. (2007)	USA	Undervisningsforløb i 2 forskellige former for systematisk problemløsning. Skemabaseret problemløsning (<i>Schema-based instruction, SBI</i>) og generel strategisk tilgang til problemløsning (<i>General strategy instruction, GSI</i>)	Elever i 3. klasse	Begge indsætter forløber over 32 lektioner	Lærer (matematik)	Matematisk problemløsning (standardiseret test), progression i læring (standardiseret test), tekstbaseret problemløsning (forskergenereret)	88 elever i 3. klasse SBI indsats: n= 45 GSI indsats: n= 43	Kvasi-eksperiment
Jitendra et al. (2013a)	USA	Small-group tutoring-indsatser. Undervisning i enten skema-instruktioner (SBI) eller school-provided standards-based curriculum (SBC)	Elever med særlige behov	12-ugers forløb, hvor eleverne dagligt modtager 1 lektions matematikundervisning af en varighed af 60 minutter og 30 minutters tutoring	Lærer (matematik) samt frivillige fra lokalsamfundet er tutorer	Matematisk progression (standardiseret test), matematisk tekstbaseret problemløsning (forskergenereret test)	109 elever i 3.klasse Indsats, SBI: n=53 Indsats, SBC: n=56	Kvasi-eksperiment

Studie	Land	Indsats	Målgruppe	Omfang	Fagpersoner	Outcomemål	Stikprøvestørrelse	Design
Jitendra et al. (2013b)	USA	Undervisningsforløb om systematisk problemløsning (SBI)	Elever i 7. klasse	Indsatsen varer 6 uger, hvor eleverne modtager 1 lektions matematikundervisning (varighed af 45-50 minutter) hver dag	Lærer (matematik)	Matematisk problemløsning (forskergenereret test), transfer (forskergenereret test)	1.163 elever i 7. klasse Indsats: n=594 Kontrol: n=569	Randomiseret, kontrolleret forsøg
Jitendra et al. (2013c)	USA	Small-group tutoring. Undervisning i enten skema-instruktioner (SBI) eller <i>school-provided standards-based curriculum</i> (SBC)	Elever med særlige behov	12-ugers forløb, hvor eleverne dagligt modtager 1 lektions matematikundervisning af en varighed af 60 minutter og 30 minutters tutoring	Lærer (matematik) samt frivillige fra lokalsamfundet er tutorer	Matematisk progression (standardiseret test), matematisk tekstbaseret problemløsning (forskergenereret test), klassiske matematiske færdigheder (standardiseret test)	136 elever i 3. klasse Indsats, SBI: n=72 Indsats, SBC: n=64	Kvasi-eksperiment
Jitendra et al. (2011)	USA	Undervisningsforløb om systematisk problemløsning (SBI)	Elever i 7. klasse	Indsatsen varer 29 skoledage, hvor eleverne hver dag modtager 1 lektions matematikundervisning af en varighed af 50 minutter	Lærer (matematik) og forsker	Matematisk problemløsning (forskergenereret test) og transfer (forskergenereret test)	463 elever i 7. klasse Indsats: n=283 Kontrol: n= 153	Randomiseret, kontrolleret forsøg
Jitendra et al. (2009)	USA	Undervisningsforløb om systematisk problemløsning (skema-instruktioner (SBI)) i matematisk problemløsning	Elever i 7. klasse, elever med forskellige indlæringsbehov	Indsatsen varer 10 skoledage, hvor eleverne i klasser hver dag modtager 1 lektions matematikundervisning af 40 minutters varighed	Lærer (matematik)	Matematisk problemløsning, progression i læring, tekstbaseret problemløsning, systematisk problemløsning	148 elever i 7. klasse Indsats: n=70 Kontrol: n=78	Randomiseret, kontrolleret forsøg
Krawec et al. (2013)	USA	Undervisningsforløb med fokus på systematisk problemløsning samt refleksion over processen	Elever i 7. og 8. klasse både med og uden særlige behov	Indsatsen varer et skoleår og består af et 3 dages intensivt instruktionsforløb af eleverne og herefter 30 minutters Solve it!-problemløsningsøvelser ugentligt	Lærer (matematik)	Matematisk problemløsning (standardiseret test)	161 elever i 7. og 8. klasse Indsats: n=88 Kontrol: n=73	Kvasi-eksperiment

Studie	Land	Indsats	Målgruppe	Omfang	Fagpersoner	Outcomemål	Stikprøvestørrelse	Design
Kroes-bergen et al. (2004)	Holland	To forskellige undervisningsmetoder, en hvor eleverne selv skal opdage løsningsstrategierne (<i>Constructivist Instructions, CI</i>), og en hvor lærerne præsenterer eleverne for en løsningsstrategi, som eleverne skal anvende (<i>Explicit Instruction, EI</i>)	Fagligt svage elever	Indsatsen består i, at elever fra de 2 indsatsgrupper modtager 30 halvtimers lektioner i enten CI eller EI over en periode på 4 til 5 måneder	Lærer (matematik)	Matematisk problemløsning med både tal og tekstformuleringer (forskergenereret test) samt motivation (standardiseret test)	256 elever fra 2. - 6. klasse Indsats: CI: n=85 Indsats: EI: n=83 Kontrol: n=97	Randomiseret, kontrolleret forsøg
Mason & Scrivani (2004)	Italien	Indsats med fokus på at skabe et godt læringsmiljø i klassen, herunder lærer eleverne blandt andet en fem-trins-problemløsningsstrategi	Elever i 5. klasse	Indsatsen består af 12 lektioner a 1,5 time med 1 lektion om ugen over en periode på 3 måneder	Lærer (matematik) samt forsker	Matematiske færdigheder (problemløsning) (forskergenereret test) og tiltro til egne matematiske evner (<i>self-efficacy</i>) (forskergenereret test)	86 elever 5. klasse Indsats: n=46 Kontrol: n=40	Randomiseret, kontrolleret forsøg
Panaoura (2012)	Cypern	Indsats med fokus på systematisk problemløsning (matematisk problemløsningsmodel), som nedbryder problemløsning i en række forbundne faser gennem et e-læringsværktøj	Elever i 5. klasse	20 individuelle lektioner (<i>individual meetings</i>). Længden og varigheden af lektionerne fremgår ikke i artiklen	E-læring	Tiltro til egne matematiske evner (<i>self-efficacy</i>) (forskergenereret test), selvregulerende adfærd (forskergenereret test), matematiske præstationer (det er ikke præciseret, om testen er forskergenereret eller standardiseret)	255 elever i 5. klasse Indsats: n=107 Kontrol: n=148	Kvasi-eksperiment
Rittle-Johnson et al. (2012)	USA	Tre undervisningsmetoder i matematik: <i>Immediate comparison of procedure</i> (ICP), <i>Delayed comparison of procedure</i> (DCP) og <i>Delayed exposure</i> (DE)	Elever i 8. klasse	Undervisningen forløber over 4 dage, og undervisningen varer i gennemsnit 84 minutter pr. dag.	Lærer (matematik)	Procesfleksibilitet (forskergenereret test), procesviden og begrebsviden i forhold til at løse ligninger (forskergenereret test)	198 elever i 8. klasse ICP- indsats: n=67 DCP-indsats: n= 62 DE-indsats: n=69	Kvasi-eksperiment

* Andelen af elever i de to grupper er ikke præciseret.

3.1.1 Forskningen på området

Forskningen relateret til temaet *systematisk problemløsning* er kendetegnet ved en række generelle karakteristika. For det første er en overvejende del af studierne amerikanske, idet 15 ud af de 19 studier er amerikanske. De resterende fire studier er fra henholdsvis Holland (Harskamp & Suhre, 2007; Kroesbergen et al., 2004), Italien (Mason & Scrivani, 2004) og Cypern (Panaoura, 2012). Der er ikke identificeret nordiske studier, som lever op til kortlægningens inklusionskriterier indenfor temaet systematisk problemløsning.

Et andet karakteristikum ved studierne er, at de alle er baseret på eksperimentelle forskningsdesign. Ud af de 19 studier er otte randomiserede, kontrollerede forsøg, hvor de resterende 11 studier er baseret på kvasi-eksperimentelle design. Studierne er derfor karakteriseret ved at være metodisk solide i forhold til at måle effekter af deres indsatser.

En tredje karakteristikum er, at studierne er kendetegnet ved overvejende at være målrettet elever i indskoling og mellemtrinnet (6-12 år). Ud af de 19 studier er 13 målrettet elever i indskoling eller på mellemtrinnet i grundskolen. I fem studier går eleverne i 7. eller 8. klasse (Jitendra et al., 2009, 2011, 2013b; Krawec et al., 2013; Rittle-Johnson et al., 2012), mens et studie omhandler indsatser for gymnasieelever (Harskamp & Suhre, 2007).

Derudover er der stort set det samme antal studier, som enten har fokus på alle elever, eller som har fokus på elever med særlige behov. I 10 af de 19 inkluderede studier omfatter indsatserne typisk alle elever i klasserne (Fuchs et al., 2006; Gamo et al., 2010; Griffin & Jitendra, 2009; Harskamp & Suhre, 2007, Jitendra, 2007, 2011, 2013b, Mason & Scrivani 2004, Panaoura, 2012, Rittle-Johnson et al., 2012). Derudover er der en gruppe på fire studier, hvor der er fokus på hele klassen i indsatsen samt elever med særlige behov (Bottge et al., 2004, Fuchs et al., 2004, Jitendra et al., 2009, Krawec et al., 2013). Dertil kommer fem studier, som udelukkende har fokus på elever med særlige behov, hvor eleverne er kendetegnet ved at have faglige udfordringer i forhold til matematik (Bryant et al., 2001; Fede, 2010; Jitendra 2013 a, c; Kroesbergen et al., 2004).

3.1.2 Indsatser, metoder, praksis og redskaber

I forskningen er der identificeret en række forskellige indsatser, der alle har til formål at styrke elevers evne til systematisk at problemløse og -løse matematiske opgaver. Der kan identificeres følgende tre forskellige indsatstyper, som alle er centreret om at styrke elevernes færdigheder indenfor systematisk problemløsning:

1. Systematisk problemløsning med fokus på at præsentere eleverne for en metakognitiv strategi, som giver eleverne redskaber til at udtænke den gode idé til løsning af problemet (Bottge et al., 2004; Bryant et al., 2001; Gamo et al., 2010; Krawec et al., 2013; Kroesbergen et al., 2004; Mason & Scrivani 2004; Rittle-Johnson et al., 2012).
2. Skemabaserede instruktioner, som en del af systematisk problemløsning, hvor eleverne præsenteres for en metakognitiv strategi, som er opbygget om fire faste komponenter (og derfor er sammenlignelig med de metakognitive strategier, som eleverne præsenteres for i det første tema). Indsatserne indenfor dette tema præciserer også, hvordan undervisningen skal tilgås, for at eleverne bliver i stand til at genkende den skematiske struktur i matematiske problemstillinger (*shema-based instructions, SBI*) (Fuchs et al., 2004, 2006; Griffin & Jitendra, 2009; Jitendra et al., 2007, 2009, 2011, 2013 a, b, c).
3. Systematisk problemløsning, hvortil der anvendes et computerprogram, som hjælper eleverne til at blive opmærksomme på de forskellige elementer af den metakognitive strategi i problemløsningsprocessen (Fede, 2010; Harskamp & Suhre, 2007; Panaoura, 2012).

Første kategori består af studier, hvor indsatstypen er kendetegnet ved, at den **systematiske problemløsning sker med fokus på, at eleverne skal anvende en metakognitiv strategi i løsningen af matematiske problemer**. Det varierer mellem studierne, hvor præcis de metakognitive strategier er beskrevet. Hensigten er, at eleverne ved tillæring af den metakognitive

strategi får redskaber, som kan hjælpe dem til at få løsningsideer i forhold til matematiske problemer, således at de selv kan løse det matematiske problem.

Indsatsen i studiet af Kroesbergen et al. (2004) har fokus på, at lærerne præsenterer eleverne for en metakognitiv problemløsningsstrategi, som eleverne dernæst skal følge i problemløsningsprocessen. Læreren viser med et eksempel, hvordan man benytter sig af strategien og illustrerer det om nødvendigt med forskellige materialer, fx træblokke. Eksempelvis placeres to bunker af tre træblokke, og læreren forklarer, at man kan udregne det samlede antal træblokke ved både at sige $3 + 3$ og 2×3 . I næste opgave skal eleverne anvende tegnene for addition og multiplikation i en opgave omhandlende, hvor mange hjul to firehjulstrækkere har. Eleverne kan både udregne det samlede antal hjul ved at sige $4 + 4$ eller ved at sige 2×4 .

I studiet af Gamø et al. (2010) er udgangspunktet, at eleverne af læreren bliver præsenteret for to forskellige problemløsningsstrategier på samme matematisk problemstilling. Eleverne bliver bedt om at sammenligne og diskutere de forskellige problemløsningsstrategier. Derudover indgår der i indsatsen øvelser, hvor eleverne bliver mindet om de problemløsningsstrategier, de har stiftet bekendtskab med, når de skal løse nye matematiske problemer. Elevernes evne til at overføre den tilegnede strategi til et nyt matematisk område trænes dermed.

Ovenstående studier har dermed det til fælles, at eleverne bliver præsenteret for matematiske problemstillinger af læreren, hvor læreren gennem et eksempel viser eleverne, hvordan man anvender en given strategi. For denne del af studierne er det derudover gældende, at de enkelte trin i den metakognitive tilgang ikke er eksplicit beskrevet eller illustreret for eleverne.

I de resterende fire studier i denne kategori er de forskellige elementer af den metakognitive tilgang i systematiske problemløsning i højere grad ekspliciteret.

En af indsætterne¹⁴ i Bottge et al. (2004) er en traditionel læringsform, hvor eleverne arbejder med tekstbaserede problemer. Eksempelvis undervises eleverne i en otte-trins-metakognitiv problemløsningsstrategi opbygget om følgende: 1) Læs problemet (*read*), 2) omskriv problemet (*paraphrase*), 3) visualiser problemet (*visualize*), 4) gengiv problemet (*re(state)*), 5) kom med et forslag til løsningen (*hypothesize*), 6) kom med et skøn på løsningen (*estimate*), 7) udregn problemet (*compute*) og 8) vurdér løsningen (*self-check*). I undervisningen gennemgås de otte trin i problemløsningen efterfølgende, ved at læreren præsenterer matematiske problemer på en overhead, hvorefter eleverne i fællesskab skal diskutere og indlære de forskellige trin i problemløsningen, således at de kan anvende dem senere. Derudover præsenterer læreren eleverne for nogle forskellige remser, således at de kan huske de forskellige trin i problemløsningen, som eksempelvis "*Robert picked very red hot eggplants cause he's crazy*". Remsen anvender det første bogstav i hvert trin og skal dermed hjælpe eleverne til at huske de forskellige trin. Efter eleverne har løst de traditionelle tekstbaserede problemstillinger og forstået de forskellige trin i problemløsningsstrategien, skal eleverne løse en række praktiske opgaver, hvor de skal anvende matematikken i udregningen af opgaverne.

I Bryant et al. (2010) har indsatsen fokus på at fremme 1. klasses elevers matematiske færdigheder gennem, 1) at læreren løser matematiske problemer på tavlen for alle elever og "tænker højt", imens problemet løses, og derigennem viser, hvordan man løser matematiske problemer, 2) at elever bruger konkrete materialer (eksempelvis terninger, faktakort, modeller og lignende) til at modellere problemer og illustrere sammenhænge mellem matematiske problemstillinger, og 3) at eleverne lærer kognitive strategier til at løse forskellige typer af matematiske problemer, fx at tælle og fordoble et tal. Indsatsen er systematisk implementeret og baserer sig på følgende elementer i undervisningen:

¹⁴ I studiet undersøges effekten af to forskellige undervisningsmetoder i matematik, *Enhanced anchored instruction* (EAI) og *Text-based instruction* (TBI), på matematikkundskaber og problemløsningsevner hos elever i 6. klasse. I dette tema er det blot den tekstbaserede indsats, der indgår, da den anden (EAI) indsats falder ind under temaet om anvendelse af konkrete materialer i undervisningen, da det i EAI er udgangspunktet for læringen, hvor TBI er centeret om anvendelsen af systematisk problemløsningsstrategier.

- En undervisningsrutine, der består af en vejledende praksis (hvor læreren "tænker højt") og en selvstændig praksis (overvågning af elevernes fremskridt)
- En fast procedure for, hvordan fejl rettes
- En strategi til at sikre elevernes progression (*spacing*)
- Muligheder for meningsfulde praksisøvelser (fx med visuelle præsentationer)
- Brug af eksempler
- Evaluering.

Ud over disse elementer i undervisningen skal eleverne dagligt løse problemer i forhold til undervisningsindholdet med henblik på at kunne følge deres egen læringsproces.

I Mason & Scrivani (2004) bliver eleverne af læreren præsenteret for en metakognitiv tilgang til løsning af matematiske opgaver. Den metakognitive tilgang har til formål at give eleverne redskaber til at udtænke den gode idé til løsning af problemet, herunder hvorfor problemet skal løses på denne måde, samt hvad de skal gøre, når de kommer i vanskeligheder med at løse problemet. Det sker som led i at skabe et *anderledes læringsmiljø* ved at ændre *elevernes og lærerens rolle i klassen*. Elevernes rolle ændres ved systematisk at opfordre eleverne til selv at arbejde med at løse de matematiske opgaver gennem forskellige trin og dermed i højere grad tage ansvar for deres egen læring. Aktiviteterne består af en problemløsningsstrategi med følgende fem trin:

1. Eleverne skal *lave en præsentation af problemet* til sig selv ved at tegne et billede, lave en liste eller et skema over problemets elementer, identificere relevant og irrelevant information.
2. Eleverne skal *træffe beslutning* om, hvordan problemet skal løses ved at udarbejde et diagram (*flowchart*), at gætte og tjekke (*guess and check*), at lede efter et mønster og ved at simplificere tallene, som indgår i problemløsningen.
3. Eleverne skal *gennemføre den nødvendige udregning* for at løse problemet.
4. Eleverne skal *fortolke resultaterne* og angive et svar.
5. Eleverne skal *evaluere resultatet*.

Derudover består indsatsen af, at eleverne først i grupper og derefter i plenum skal diskutere og evaluere de forskellige problemløsningsmuligheder.

Indsatsen i Krawec et al. (2013) er bygget op om *Solve It!*, som er designet til at forbedre præstationerne i forhold til problemløsning hos elever med særlige behov. *Solve It!* indeholder en instruktionsmanual og guide for lærerne, manualbaserede lektioner samt materiale til brug i undervisningen. *Solve It!* går ud på at præsentere eleverne for en række trin i forbindelse med problemløsning. Problemløsningsstrategien i *Solve it!* består af følgende fire trin:

1. *Forståelse af problemet*, hvor eleverne skal omformulere problemet med deres egne ord (*reading and paraphrasing*).
2. *Visualisering af problemet*, hvor eleverne skal visualisere problemet ved at gengive forholdet mellem de forskellige matematiske elementer, som indgår i problemet (*visualizing*).
3. *Valg af løsningsstrategi*, hvor eleverne selv skal finde på en idé til en løsningsstrategi, en måde at løse problemet på, og derefter komme med et bud på løsningen (*hypothesizing and estimating*).
4. *Løsning af problemet*, hvor eleverne skal løse problemet og vurdere deres svar samt den proces, de har været igennem for at nå til løsningen (*computing and checking*).

Derudover indeholder indsatsen i Krawec et al. (2013) en afsluttende refleksionsproces, hvor eleverne skal overveje, hvorvidt de har anvendt den mest hensigtsmæssige problemløsningsstrategi.

De ovenfor nævnte indsatser har det til fælles, at eleverne præsenteres for en metakognitiv tilgang, som giver eleverne nogle redskaber, de kan anvende, når de skal løse matematiske pro-

blemer. Den metakognitive tilgang løser ikke de matematiske problemer for eleverne, da elever selv skal udtænke løsningen, men de bliver gjort opmærksomme på, hvilke elementer de skal fokusere på. Læreren guider dermed eleverne i deres problemløsning og fortæller dem, hvordan de skal gribe forskellige problemstillinger an. I nogle af indsætterne anvendes der konkrete materialer som eksempelvis træblokke og bolde til at illustrere de matematiske problemer.

Den **anden kategori** indeholder studier, som undersøger brugen af **skemabaserede instruktioner** (*schema-based instructions, SBI*) indenfor systematisk problemløsning. Hensigten med indsætterne er, at eleverne skal anvende en systematisk og skematisk tilgang til løsning af matematiske problemer. Tilgangen består af, at eleverne skal lære at benytte sig af en metakognitiv strategi med en række fast definerede og forbundne faser/trin, som kan hjælpe problemløsningsprocessen på vej for eleverne. Forskellen er, at de skematiske strategier i højere grad fokuserer på, at eleverne skal kunne genkende de forskellige matematiske elementer og placere de oplysninger, de får i det skematiske diagram. Det betyder, at de skematiske strategier anvendes for at identificere både mønstre af relationer og hjælpe eleverne til at forbinde forskellige opsætninger af matematiske problemer til samme struktur. Derudover er det gældende, at den didaktiske ramme for indsætterne, som anvender skemabaserede instruktioner, er præciseret, det vil sige, at den måde, hvorpå undervisningen skal tilgås, er præciseret. Derudover er det kendetegnende, at studierne primært er udgivet af den samme forfatter, Jitendra¹⁵, hvor SBI-indsættens effekter afdækkes på forskellige alderstrin, for elever med og uden særlige behov og enten i hele klasser eller i mindre undervisningskontekster. Særlig for SBI-indsættelsen er, at undervisningen er opbygget om fire komponenter, når der undervises i matematiske begreber som eksempelvis forholdstals- og procentproblemer.

1. Først forklarer læreren om de matematiske problemers struktur, og hvordan problemerne er opbygget ved at fokusere på forskellige elementer af matematikken.
2. Dernæst visualiserer lærerne de informationer, som eleverne skal bruge for at løse problemerne i et skematisk diagram.

Opstillingen af de givne informationer i det matematiske problem sker med afsæt i, hvorvidt der arbejdes med forholdstals- eller procentproblemer. Herunder ses et eksempel på opsætningen af informationerne i et skematisk diagram vedrørende sammenhængen mellem dele og helheder indenfor procenter. Problemet lyder som følger: *"I en geografi-test kan man maksimalt opnå 25 point. Janie fik en karakter svarende til, at hun havde svaret 20 procent rigtigt. Hvor mange point fik hun i testen?"* Herefter illustreres det, hvorledes problemstillingen ser ud i et skematisk diagram.

Figur 3-3: Skematisk diagram for procenter

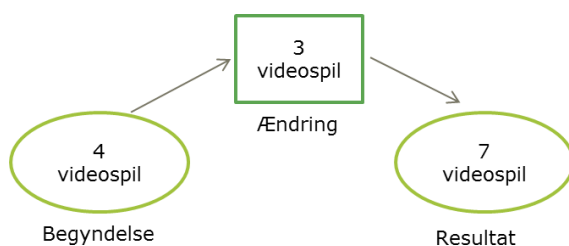


Det betyder, at eleverne trænes i at genkende de matematiske elementer i en tekst og derved tilegner sig viden om, hvordan de skal placere elementerne i forhold til hinanden, som hvis det havde været et klassisk regnestykke.

I forhold til at forstå ændringer (*change*) i matematiske problemer kan den problematik, som eleverne bliver mødt med, lyde som følger: *"Jane har 4 videospil. Hendes mor gav hende 3 ekstra videospil, hvor mange videospil har Jane nu?"*

¹⁵ Asha Jitendra, er Ph.D. Professor of Special Education på University of Minnesota.

Figur 3-4: Skematisk diagram for ændringer



Det skematiske diagram viser eleverne, hvor de skal placere de oplysninger, problematikken indeholder. Det skematiske diagram kan eleverne anvende, når de bliver præsenteret for næste spørgsmål, som eksempelvis: "Tammy kan lide at male billeder af blomster. Hun har malet 12 billeder ind til videre. Hvis hun maler 4 til, hvor mange billeder har hun så?". Eleverne trænes derfor i at kunne anvende de skematiske strukturer i løsningen af nye matematiske problemer. De to første elementer præciserer dermed den didaktiske ramme for undervisningen.

3. Tredje komponent består i, at lærerne underviser eleverne i en særlig fire-trins-problem-løsningsprocedure. Her er der fokus på, at eleverne først skal finde problemet, dernæst skal de identificere informationerne i problemet, hvorefter de skal løse problemet, og til sidst skal eleverne tjekke resultatet for at se, om de har løst det korrekt.

Ovenstående element er indholdet af den metakognitive tilgang, som eleverne præsenteres for i indsatsen. Det er gennem disse elementer, at eleverne skal blive bevidste om, hvad de gør, når de skal løse matematiske problemstillinger, og hvorfor problemstillingerne skal løses på den måde, samt hvad de skal gøre, når de kommer i vanskeligheder med at løse den matematiske problemstilling. Den metakognitive tilgang løser ikke den enkelte problemstilling for eleverne, men hjælper dem med at finde ideen til at håndtere problemstillingen.

4. Fjerde komponent består i, at lærerne arbejder med at udvikle elevernes kompetencer til at anvende metakognitive strategier og få eleverne til at reflektere over elementerne, som indgår heri.

Den fire-trins-problemløsningsprocedure, som er udgangspunktet i SBI-indsatsen, er fokuseret på at tillære eleverne en heuristisk tilgang¹⁶ og få eleverne til at anvende metakognitive strategier i problemløsningen. De studier, som anvender SBI-indsatsen, foregår ofte ved, at hele klassen er placeret samlet, og hvor eleverne lærer at anvende en skemabaseret problemløsningsstilgang til matematiske opgaver. Dog er der enkelte af studierne, hvor undervisningen i SBI-indsatsen foregår i mindre grupper, der fungerer som et supplement til den almindelige undervisning.

¹⁶ Heuristisk tilgang betegner en måde at lave smarte gæt, som hjælper til at finde løsninger på et problem.

Boks 3-1: Eksempel på SBI-indsats

I studiet undersøges effekten af skemabaserede instruktioner (SBI) i matematisk problemløsning for elever med forskellige indlæringsbehov i almindelige folkeskoler.

Lektionerne er detaljeret beskrevet i SBI-indsatsen, som består af 10 lektioner af en varighed på 40 minutter. Herunder præsenteres indholdet af de enkelte lektioner.

1. lektion: Forholdstal (*Ratios*)
 - a. Definer forholdstal som et multiplikativt forhold.
 - b. Identificer basismængde til sammenligning af mængder, der involverer del-til-del og en del-til-helhed.
2. lektion: Ækvivalenstal
 - a. Brug visuelle diagrammer til at forstå betydningen af ækvivalenstal.
 - b. Identificer hele ækvivalentstal i deres laveste eller enkleste form.
 - c. Afgør, om ækvivalenstal er i simpleste form ved hjælp af deling af fælles faktorer.
3. og 4. lektion: Tekstbaseret problemløsning med forholdstal
 - a. Anvend forholdstal i tekstbaseret problemløsning.
 - b. Brug et skematisk diagram til at illustrere informationerne i problemet.
 - c. Planlæg at løse problemet ved at bruge multiplikations- og brøkstrategier.
5. lektion: Rater og quiz
 - a. Definer rater som en sammenligning af to mængder med forskellige enheder.
 - b. Forstå og lær at beregne enhedsrater.
 - c. Lær at løse problemer, hvor to rater sammenlignes.
6. og 7. lektion: Forholdstal og tekstbaseret problemløsning (*proportional*)
 - a. Anvend forholdstal til at løse problemer.
 - b. Brug et skematisk diagram til at illustrere informationerne i problemet.
 - c. Planlæg at løse problemet ved at bruge multiplikations- og ækvivalenstals-strategier.
8. og 9. lektion: Målestoksforhold i tekstbaseret problemløsning
 - a. Identificer en sammenhæng, og vis dette med en skala-tegning, og beregn dimensioner i en tegning ved hjælp af målestoksforhold.
 - b. Brug et skematisk diagram til at illustrere målestoksforholdet.
 - c. Planlæg at løse problemet.
10. lektion: Brøkgregning og procenter
 - a. Identificer procenttal.
 - b. Forstå, at procenter og brøkgregning er to måder at sammenligne dele med helheder.
 - c. Forstå forholdet mellem procenter og brøkgregning.
 - d. Illustrer muligheden for at omregne fra procenter til brøker og omvendt.

Læs mere om SBI-indsatser i Jitendra, Asha K.; Jon R. Star, Kristin Starosta, Jayne M. Leh, Sheetal Sood, Grace Caskie, Cheyenne L. Hughes & Toshi R. Mack (2009) *Improving Seventh Grade Students' Learning of Ratio and Proportion: The Role of Schema-Based Instruction*

Den **tredje kategori** indeholder tre studier, som belyser brugen af **computerbaserede programmer** inden for systematisk problemløsning. Samme studier optræder i temaet om it-baseret undervisning, hvor elevernes brug af computerprogrammerne trækkes frem. I indsatserne anvendes computerprogrammer til at hjælpe eleverne til at blive opmærksomme på de forskellige elementer af den metakognitive strategi i problemløsningsprocessen. Eleverne bliver gennem computerprogrammerne opmærksomme på en række fast definerede og forbundne faser/trin, som kan hjælpe problemløsningsprocessen på vej for eleverne. Fokus i dette afsnit er på den strategi, som eleverne præsenteres for i relation til elevernes løsning af matematiske problemer, hvor computerprogrammerne er en del af strategien.

I studiet af Fede (2010) undersøges effekten af et computerbaseret program, som lægger vægt på, at eleverne skal tillære sig en skematisk problemløsningsstilgang, som gør dem i stand til at genkende strukturen i matematiske problemer (*schema-based instructions, SBI*). Forskellen fra de andre studier, som er opbygget om SBI-indsatsen, er, at eleverne gennem computerprogrammet får umiddelbar feedback på, hvordan eleven har klaret sig i de enkelte opgaver, som eleven skal løse, ved at få vejledning fra programmet. Programmet er i stand til at justere de øvelser, som eleven løbende skal udføre, i forhold til hvordan eleven har klaret sig i tidligere opgaver (*det adaptive princip*). Dette betyder, at eleverne får en hurtigere og mere individuel feedback, end når de modtager klasseundervisning.

I studiet af Panaoura (2012) sættes ligeledes fokus på anvendelsen af et computerprogram inden for systematisk problemløsning. Her bliver eleverne gennem en e-læringshjemmeside trænet i en matematisk model for problemløsning. Den matematiske model for problemløsning i dette studie nedbryder problemløsningen i en række forbundne faser. Hver fase indeholder forskellige elementer og udfordringer, som eleverne skal tage stilling til. Ved at nedbryde problemløsningen i en række faser er ideen, at eleverne bliver bedre til at gå mere systematisk til værks, når de skal løse problemer, fordi de lærer at se de enkelte elementer af problemerne og dermed nedbryde problemløsningen. Det handler om at træne elevernes metakognitive evner, hvilket vil sige at gøre eleverne mere opmærksomme på, hvad de gør, og hvorfor det skal gøres på den måde, samt hvad de skal gøre, når de kommer i vanskeligheder.

Studiet af Harskamp & Suhre (2007) er ligeledes opbygget om, at eleverne gennem computerprogrammet bliver præsenteret for den metakognitive strategis fire trin: De fire trin er: 1) Læs og analyser problemet, 2) identificer, hvilken matematisk viden der skal anvendes, 3) udvikl og implementer en løsningsplan, og 4) tjek resultatet. Undervejs kan gymnasieeleverne i computerprogrammet benytte sig af instruktionshints for hvert trin i problemløsningen, hvor der er mulighed for at vælge forskellige løsningsmetoder. På den måde kan gymnasieeleverne selv vælge graden af instruktionsniveau til at støtte dem bedst.

3.1.3 Resultater og effekter

Samlet set tegner alle 19 studier et billede af, at indsatser med fokus på **systematisk problemløsning har en positiv effekt** på elevernes faglige præstationer. Der er forskel på, hvilke outcome mål der bliver anvendt i de enkelte studier. I 15 ud af 19 studier er der fokus på, om systematisk problemløsning har en effekt på elevernes evne til at løse matematiske problemer (*problem solving*). I enkelte studier undersøges effekten af indsatserne på elevernes progression i matematiske færdigheder, motivation for at tilegne sig matematiske færdigheder og/eller tiltro til egne matematiske evner. Den positive effekt af systematisk problemløsning dokumenteres i 13 studier af høj forskningsmæssig kvalitet.

Tabellen nedenfor opsummerer de virkningsfulde mekanismer, som indeværende kortlægning har identificeret i forhold til temaet om systematisk problemløsning. Resultaterne sammenholdes endvidere med de enkelte studiers evidensvægt.

Tabel 3-2: Virkningsfulde mekanismer under temaet om systematisk problemløsning

Indsatsernes fokus	Studie	Kontekst	Positiv effekt	Ingen effekt	Evidensvægt
Systematisk problemløsning med fokus på at lære en strategi	Bryant et al. (2001)	Grundskole	Progression i matematikfaglighed	Matematisk problemløsning	Høj
	Krawec et al. (2013)	Grundskole	Matematisk problemløsning	-	Høj
	Kroesbergen et al. (2004)	Grundskole*	Matematisk problemløsning med både tal og tekstformuleringer	Motivation	Høj
	Rittle-Johnson et al. (2012)	Grundskole	Procesfleksibilitet, procesviden**	Procesviden** og begrebsviden i forhold til at løse ligninger	Høj
	Bottge et al. (2004)	Grundskole	Tekstbaseret problemløsning (indsats med systematisk problemløsning)***	Matematiske færdigheder (brøkrengning)	Medium
	Gamo et al. (2010)	Grundskole	Transfer	-	Medium
	Mason & Scrivani (2004)	Grundskole	Matematisk overbevisning og problemløsning, tekstbaseret problemløsning	-	Medium
Systematisk, skematisk problemløsning (skema baseret instruktioner, SBI)	Fuchs et al. (2004)	Grundskole	Matematisk problemløsning og transfer	-	Høj
	Fuchs et al. (2006)	Grundskole	Matematisk problemløsning og transfer	-	Høj
	Griffin & Jitendra (2009)	Grundskole	Tekstbaseret problemløsning og regnefærdigheder, progression i læring****	-	Høj
	Jitendra et al. (2007)	Grundskole	Matematisk problemløsning, tekstbaseret problemløsning	Progression i læring	Høj
	Jitendra et al. (2009)	Grundskole	Matematisk problemløsning, tekstbaseret problemløsning	Progression i læring, systematisk problemløsning	Høj
	Jitendra et al. (2013b)	Grundskole	Matematisk problemløsning	Transfer	Høj
	Jitendra et al. (2013c)	Grundskole	Tekstbaseret problemløsning	Matematisk progression, klassiske matematiske færdigheder	Høj
	Jitendra et al. (2011)	Grundskole	Matematisk problemløsning	Transfer	Medium
	Jitendra et al. (2013a)	Grundskole	Tekstbaseret problemløsning, progression i matematik	-	Medium

Indsatsernes fokus	Studie	Kontekst	Positiv effekt	Ingen effekt	Evidensvægt
Systematisk problembehandling gennem computerprogram	Fede (2010)	Grundskole	Matematiske færdigheder (MCAS ¹⁷) og progression i læring	Matematiske færdigheder (G-MADE ¹⁸) og angst for matematik	Høj
	Harskamp & Suhre (2007)	Gymnasium	Matematisk problemløsning	-	Høj
	Panaoura (2012)	Grundskole	Tiltro til egne matematiske evner (<i>self-efficacy</i>), selvregulerende adfærd (<i>self-regulation</i>), matematiske præstationer	-	Medium

* Indsatsen foregår delvis på almindelige skoler og i specialskoler.

** Indsatsen viser, at der er positive effekter på procesviden i forhold til at fastholde opnåede kompetencer (retention), hvorimod den del af procesvidenstesten, som blot omhandler de umiddelbare effekter, ikke viser nogen effekt.

*** Indsatsen med problemløsning, hvor der anvendes virkelighedsnære eksempler (*real life*), har en positiv effekt på videobaseret problemløsning.

**** SBI-eleverne klarede sig bedre undervejs, men afslutningsvis var der ingen forskel på SBI og GSI.

¹⁷ MCAS er *The State Mathematic Assessment test, Massachusetts Comprehensive Assessment System*.

¹⁸ GMADE er *The Group Mathematics and Diagnostic Evaluation*", der testes bl.a. følgende: *Concepts and communication, Operations and computations, and Process and applications*.

Som det fremgår af ovenstående tabel, er der inden for hver af de tre kategorier fundet positive effekter i alle studier på et eller flere af de anvendte outcomemål. Derudover er der otte studier, som finder positive effekter af indsætterne på en del af outcomemålene, samtidig med at de ingen effekter finder på andre outcomemål.

Inden for kategorien **systematisk problemløsning** er det fire ud af fem studier, som finder en positiv effekt af indsætterne på elevernes matematiske problemløsningsevne (Bottge et al., 2004; Krawec et al., 2013; Kroesbergen et al., 2004; Mason & Scrivani, 2004). Bryant et al. (2001) finder dog ingen effekt af indsatsen på elevernes matematiske problemløsningsevne. I stedet finder studiet, at indsatsen har en positiv effekt på elevernes matematiske progression. Gamo et al. (2010), som måler effekten af indsatsen på elevernes transfer – det vil sige deres evne til at overføre løsning fra en matematisk/hverdagskontekst til en anden matematisk/hverdagskontekst – finder, at indsatsen har en positiv effekt på elevernes transfer-evne.

I gruppen af studier, som undersøges effekten af **skemabaserede instruktioner** inden for systematisk problemløsning, finder alle en positiv effekt på elevens kompetence til problemløsning. Derudover finder to af studierne, at indsatsen har en positiv effekt på transfer (Fuchs et al., 2004, 2006), hvorimod to andre studier ikke finder, at indsatsen har en effekt på transfer (Jitendra et al., 2009, 2013b). Det er derfor på baggrund af indeværende kortlægning ikke klart, hvorvidt skemabaserede instruktioner har en positiv effekt på elevens evne til at overføre den viden, de har opnået inden for et matematisk/hverdagskontekst, til et andet matematisk/hverdagskontekst (*transfer*).

Inden for kategorien af studier, som belyser brugen af **computerbaserede programmer** i forhold til systematisk problemløsning, er der tre studier. Det ene studie af Fede (2010) viser, at der er fremskridt for eleverne, målt med test undervejs i indsatsforløbet, samt at der er en positiv effekt i den ene af de to færdighedstest ved at anvende computerbaserede programmer. Fede (2010) finder, at der ingen effekt er på den matematiske færdighedstest, samt at indsatsen ej heller viser resultater i forhold til elevens nervøsitet og utryghed i forhold til matematik. Det andet studie af Panaoura (2012) finder, at computerbaserede programmer har en positiv effekt på elevens tiltro til egne matematiske evner (*self-efficacy*), selvregulerende adfærd¹⁹ (*self-regulation*) samt matematiske præstationer. Harskamp & Suhre (2007) finder ligeledes, at kombinationen af systematisk problemløsningsstrategier med et computerprogram har positive effekter på gymnasieelevers kompetencer i forhold til matematisk problemløsning.

Samlet set viser indsætterne en positiv effekt på elevens kompetence til matematisk problemløsning. Det betyder, at eleverne gennem indsætterne bliver i stand til at bruge redskaberne i den systematiske problemløsning – den metakognitive strategi, således at de kan udtænke ideen til løsningen af det matematiske problem. Implicit er der i studierne en forventning om, at eleverne ved at opnå bedre kompetencer til at løse matematiske problemer gennem metakognitive strategier samtidig bliver bedre til at anvende matematikken i hverdagssammenhæng og at bringe hverdagen ind i løsningen af matematiske problemer.

Som tidligere beskrevet er der flere af studierne inden for temaet om systematisk problemløsning, hvor målgruppen er elever med særlige behov, som er i risiko for at udvikle specifikke vanskeligheder i matematik. I studiet af Fuchs et al. (2004) sammenlignes elever med og uden særlige behov. Studiet viser, at der ikke er nogen forskel mellem elever med særlige behov i forhold til den samlede gruppe elevens matematiske problemløsningsevne og evne til at overføre opnået viden fra et område indenfor matematikken til et andet. Det betyder altså, at elever, som er i risiko for at udvikle specifikke vanskeligheder i matematik, i lige så høj grad, som elever der ikke er i risiko, gennem indsatsen bliver bedre til at overføre den viden, de har opnået inden for et matematisk område til et andet matematisk område. Bryant et al. (2011) finder, at 45 pct. af eleverne, som er i indsatsgruppen, ved eftermålingen ikke længere betegnes som elever, der har

¹⁹ Elevernes selvregulerende adfærd (*self-regulation*) dækker i dette studie over elevernes evne til at løse opgaver og deres evne til at forklare resultatet og fremgangsmåden til andre

et særligt behov for støtte og strukturerede instruktioner (*Tier 2*), hvorimod det blot er tilfældet for 22 pct. af eleverne i kontrolgruppen. Studierne af Krawec et al. (2013) og Kroesbergen et al. (2004) finder begge, at indsatserne har en positiv effekt på elever med særlige behovs evne til at løse matematiske problemstillinger. Samlet set viser disse studier, at elever med særlige behov i høj grad profilerer af at modtage undervisning i systematisk problemløsning, samt at nogle af eleverne, efter de har modtaget indsatsen, ikke længere er i risikogruppen i forhold til at have svagere matematiske færdigheder.

Jitendra et al. (2013 a) finder, at meget fagligt svage elever (som befinder sig i 1-25 percentil score for matematik) opnår højere effekter på deres matematiske problemløsningsevne ved at modtage skemainstruktioner (SBI) frem for almindelig undervisning (*school-provided standards-based curriculum, SBC*). Jitendra et al. (2013 c) har ikke på samme måde skelnet mellem meget fagligt svage elever og mindre fagligt svage elever. Dog finder de, at de elever, som ved førmålingen opnår høje resultater i matematisk problemløsning (og dermed måske kan ses som værende mindre fagligt svage elever), opnår bedre resultater ved eftermålingen, hvis de har deltaget i indsatsen vedrørende skemainstruktioner (SBI). Samtidig gør det sig gældende, at de elever, som ved førmålingen har opnået lave resultater i matematisk problemløsning (og dermed måske kan ses som værende fagligt svage elever), opnår bedre resultater ved eftermålingen, hvis de har deltaget i den almindelige undervisning (*SBC*). Når man sammenholder resultaterne fra disse to studier af Jitendra et al. (2013 a, c), står det ikke klart, om de fagligt svage elever opnår størst effekt af at deltage i indsatsen med skemabaserede instruktioner (SBI) eller den almindelige undervisning (*SBC*).

I 15 ud af de 19 studier, som indgår i temaet om systematisk problemløsning, er det elevernes matematiklærere, som foretager undervisningen i indsatserne. I enkelte af studierne er det både en matematiklærer og en forsker (Gamo et al., 2010; Jitendra et al. 2011; Mason & Scrivani, 2004). I to studier er det frivillige, der varetager den egentlige undervisning i indsatsgrupperne (Jitendra et al., 2013 a, c). På tværs af studierne er det generelt billedet, at indsatsen er blevet implementeret i overensstemmelse med det planlagte, og de fleste studier har gennemført fidelitetsmålinger undervejs i indsatsen. I enkelte studier fremhæves det dog, at implementeringen i mindre grad har fulgt den fastlagte indsats, eksempelvis ved at der har været sygdom blandt de lærere, som er blevet undervisning i, hvordan indsatsen implementeres, hvorfor det har været andre lærere, der har gennemført indsatsen. Derudover er der nogle af studierne, som fremhæver, at lærerne i kontrolgruppen har foretaget justeringer i undervisningen, således at kontrolgruppen har fået mere målrettet undervisning, end hvad tilfældet normalt ville være (bl.a. Jitendra et al., 2011).

3.2 Modellering

En række af studierne i kortlægningen kan grupperes under temaet modellering. Fælles for disse studier er, at de alle undersøger effekten på elevens matematiske færdigheder og matematiske problemløsning af at lade eleverne selv udvikle og finde den løsningsstrategi, de bedst kan anvende i løsningen af matematiske problemstillinger. Indsatserne beror alle på, at eleverne enten individuelt eller i grupper selv skal udtænke, konkretisere, visualisere og/eller præsentere en løsningsmodel for det matematiske problem. Eleverne skal selv anvende deres matematiske kompetencer i en given opgave, som har omverdenskarakter og ud fra deres kompetencer udtænke og opstille en løsningsmodel.

Der er identificeret **seks studier** i forbindelse med kortlægningen, som relaterer sig til temaet om modellering. Studierne er fremstillet skematisk i oversigtstabellen nedenfor og beskrives mere udførligt i afsnittet under tabellen.

Tabel 3-3: Tabel over studier tilhørende temaet om modellering, seks studier i alt

Studie	Land	Indsats	Målgruppe	Omfang	Fagpersoner	Outcomemål	Stikprøvestørrelse	Design	Evidensvægt
Bottge et al. (2004)	USA	To undervisningsmetoder i matematikindsatser med virkelighedsnær problemløsning (<i>enhanced anchored instruction, EAI</i>), hvor eleverne selv skal konstruere en model i løsningen af opgaven, og indsatser med systematisk problemløsning (<i>text-based instructions, TBI</i>)	Elever med og uden særlige behov i 6. klasse	Fase 1: 1 uge Fase 2: 6, 11 og 22 uger efter fase 1. Varigheden af fase 2 er ikke nærmere præciseret	Lærer (matematik)	Matematiske færdigheder (brøkkregning) (forsker-genereret) og problemløsnings-evne (hhv. en tekstbaseret og en videobaseret test) (forsker-genereret)	93 elever i 6. klasse	Kvasi-eksperiment	Medium
Brendefur et al. (2013)	USA	Professionel udvikling af undervisere i deres undervisningstilgang. Opgaver, hvor eleverne skal forstå matematik ved at bygge fysiske modeller, som eleverne skal visualisere, inden eleverne løser matematikopgaven	Børn i førskolealderen med særlige behov (<i>Head Start program</i>)	Lærerne modtager én 8-timers workshop i undervisningsmetoden. Det fremgår ikke, hvad omfanget af indsatsen er for børnene over de 6 måneder	Lærer	Matematiske færdigheder (standardiseret test)	144 børn i førskolealderen (<i>Head Start program</i>) Indsats: n= 111 børn, 16 lærere Kontrol: n= 33 børn, 8 lærere	Randomiseret, kontrolleret forsøg	Medium
Dijk (2003)	USA	Undervisningsforløb, hvor eleverne skal konstruere og opstille modeller, som fungerer som løsningsstrategier på elevens eget kompetenceniveau	Elever i 5. klasse	Indsatsen forløber over næsten 3 uger og består af 13 lektioner. En lektion har en varighed af 60 minutter	Lærer (matematik)	Progression i læringsproces (standardiseret test), matematiske færdigheder (standardiseret og fagspecifik test).	238 elever i 5. klasse Indsats: n= 212 Kontrol: n=117	Randomiseret, kontrolleret forsøg	Medium
Kroesbergen et al. (2004)	Holland	To forskellige undervisningsmetoder, en hvor eleverne selv skal opdage løsningsstrategierne (<i>Constructivist Instructions, CI</i>), og en hvor lærerne præsenterer eleverne for en løsningsstrategi, som eleverne skal anvende (<i>Explicit Instruction, EI</i>)	Fagligt svage elever i 2.-6. klasse	Indsatsen består i, at elever fra de to indsatsgrupper modtager 30 halvtimers lektioner i enten CI eller EI over en periode på 4 til 5 måneder	Lærer (matematik)	Matematisk problemløsning med både tal og tekstformuleringer (forsker-genereret test) samt motivation (standardiseret test)	256 elever fra 2. - 6. klasse Indsats: CI: n=85 Indsats: EI: n=83 Kontrol: n=97	Randomiseret, kontrolleret forsøg	Høj

Studie	Land	Indsats	Målgruppe	Omfang	Fagpersoner	Outcomemål	Stikprøvestørrelse	Design	Evidensvægt
Lindh & Holgersson (2007)	Sverige	Undervisningsforløb med LEGO Dacta	Elever i 5. og 9. klasse	Indsatsen forløber over 8 måneder, hvor LEGO Dacta integreres i undervisningen 2 gange om ugen	Lærer (matematik)	Matematisk test (udviklet med afsæt i de svenske nationale test), problemløsnings-test (testen er ikke specificeret)	696 elever fra 5. og 9. klasse Indsats: n= 322, heraf 193 fra 5. klasse og 129 fra 9. klasse Kontrol: n= 374, heraf 169 fra 5. klasse og 205 fra 9. klasse	Kvasi-eksperiment	Medium
Ridlon (2009)	USA	Undervisningsmetode i matematik, <i>problem-centeret approach</i> (PCL), som tager udgangspunkt i case- eller projektundervisning, hvor eleverne samarbejder om at finde en løsningsstrategi på casen	Elever i 6. klasse med og uden særlige behov	Undervisningen forløber over 9 uger. Antallet af lektioner og lektionernes varighed fremgår ikke	Lærer (matematik)	Matematisk færdighed (forskergenereret)	104 elever i 6. klasse Indsats PCL: n= 52 Kontrol: n= 52	Randomiseret, kontrolleret forsøg	Høj

3.2.1 Forskningen på området

Forskningen relateret til temaet om *modellering* er kendetegnet ved en række karakteristika. For det første er størstedelen af studierne, fire ud af seks, amerikanske (Bottge et al., 2004; Brendefur et al., 2013; Dijk, 2003; Ridlon, 2009). De resterende består af et svensk studie (Lindh & Holgersson, 2007) og et hollandsk studie (Kroesbergen et al., 2004).

Et andet karakteristikum ved studierne er, at de alle er baseret på eksperimentelle forskningsdesign. Fire ud af de seks studier er randomiserede, kontrollerede forsøg, hvor de resterende to er baseret på kvasi-eksperimentelle design. Studierne er derfor karakteriseret ved at være metodisk solide i forhold til at måle effekter af deres indsatser.

Et tredje karakteristikum ved studierne er, at størstedelen, fire ud af de seks studier, er målrettet elever i indskoling og mellemtrinnet (2.-6. klasse). Derudover er der et studie, som er målrettet elever i både 5. og 9. klasse (Lindh & Holgersson, 2007) samt et studie, som er målrettet børn i førskolealderen (Brendefur et al., 2013).

I kortlægningen er der studier, der har fokus på elever i normalområdet samt elever med og uden særlige behov. Der er to studier, som har fokus på både elever inden for normalområdet og elever med særlige behov (Ridlon, 2009; Bottge et al., 2004). Derudover er der to studier, som er universelle, idet indsatsen omfatter alle elever i klasserne (Lindh & Holgersson, 2007; Dijk, 2003). Der er to studier, som har fokus på blot enten fagligt svage elever eller elever med særlige behov (Brendefur et al., 2013; Kroesbergen et al., 2004).

3.2.2 Indsatser, metoder, praksis og redskaber

I forskningen er der identificeret forskellige indsatser, der alle har til formål at styrke elevers evne til selv at modellere deres egen problemløsningsstrategi. Det betyder, at eleverne i undervisningen ikke bliver præsenteret for en bestemt måde, hvorpå de skal tilgå løsning af problemerne, men i stedet at eleverne selv skal udvikle og opstille deres egen tilgang til at løse matematiske problemer. Derudover har de matematiske opgaver, som eleverne skal løse, omverdenskarakter, hvilket betyder, at konteksten er hentet fra virkeligheden.

Fælles for indsatserne er, at **eleverne selv skal visualisere og konkretisere fysiske modeller for deres problemløsning samt præsentere disse**. Eleverne skal, ofte i grupper, selv komme frem til, hvordan en given matematisk problemstilling kan løses. I processen med at løse matematiske problemer er en væsentlig bestanddel af indsatserne, at eleverne skal visualisere og ofte bygge en model i problemløsningsprocessen. Derudover er der i nogle af indsatserne lagt vægt på, at eleverne selv skal præsentere de løsningsmodeller, de har udviklet over for resten af klassen i form af visuelle modeller eller andre præsentationer. I de enkelte studier er der forskel på, hvordan eleverne bliver præsenteret for de matematiske opgaver.

I Bottge et al. (2004) undersøges effekten af en undervisningsmetode, hvor de matematiske problemer, som eleverne skal løse, er forankret i virkelighedsnære kontekster, *enhanced anchored instruction* (EAI). Det betyder, at selve problemstillingen har til formål at være meningsfuld og genkendelig for eleverne. Eksempelvis skal eleverne bygge en skateboardrampe, som de kender fra virkeligheden. Eleverne præsenteres for opgaven gennem en video, hvor tre elever skal bygge en skateboardrampe. Eleverne i indsatsen skal udregne, hvor meget træ der skal bruges til at bygge rampen, samt hvad den samlede pris for materialerne er. Eleverne i videoen har en mængde penge og træ til rådighed fra start, og eleverne i forsøget skal derfor udregne, hvor meget træ og hvor mange penge de mangler for at kunne bygge en skateboardrampe. Eleverne i forsøget får stillet træmoduler og en lille model af rampen til rådighed. Med udgangspunkt i dette skal eleverne selv udtænke en løsning af de matematiske problemstillinger i opgaven og selv udvikle modellen, som illustrerer løsningen af opgaven. De faktiske regneopgaver er således forankret i en virkelig situation, hvor eleverne gennem *hands-on*-projekter anvender deres matematiske færdigheder. Undervisningsmetoden i Bottge indeholder dermed elementer, hvor eleverne skal visualisere og konkretisere deres matematiske udregninger gennem en fysisk model.

Studiet af Dijk et al. (2003) omhandler et undervisningsforløb, hvor eleverne selv skal konstruere modeller til at løse matematiske problemstillinger. I indsatsen er virkeligheden hentet ind i matematikken, da problemstillingen er centreret om en biograf, og hvor meget kaffe der skal brygges til publikum. Formålet er, at eleverne ved selv at opstille modeller skaber læringsstrategier, som svarer til deres eget kompetenceniveau. Indsatsen består af 13 lektioner over en periode på næsten tre uger. En lektion varer 60 minutter. I den første lektion bliver eleverne præsenteret for, hvad strategisk læring er og med fokus på, at de selv kan udtænke den rette strategi for løsning af matematiske problemer, og hvordan eleverne kan anvende modeller til at udregne matematiske problemer. De resterende 12 lektioner sætter fokus på grafer og procentregning. Eleverne skal med hjælp fra lærerne udvikle deres egne modeller til at løse problemstillingerne i forhold til mængden af kaffe med brug af grafer og procentregning. Derefter skal eleverne fremlægge og diskutere, hvorfor de netop har udviklet den pågældende model til problemet, og hvordan man kan bruge modellen på andre problemstillinger. Indsatsen er her fortløbende centreret om, at eleverne selv skal udvikle, konstruere og præsentere en problemløsningsmodel for at løse den matematiske problemstilling, herunder foretage de nødvendige udregninger for at besvare problemformuleringen.

Boks 3-2: Eksempel på indsats, hvor der indgår modellering

Eksempel på indsatsen i et undervisningsforløb, hvor eleverne selv skal konstruere modeller til at løse matematiske problemstillinger.

I studiet omhandler den matematiske problemstilling en biograf, hvor det er muligt for publikum under filmen at bestille friskbrygget kaffe ved at trykke på en knap.

Eleverne skal vurdere, om der er nok kaffe i kaffemaskinen til publikum.

Eleverne får en plan over biografens sal, hvor der er sorte og hvide felter samt et billede af en kaffemaskine, som er $\frac{3}{4}$ fyldt op. Eleverne skal derfor både tage stilling til, hvad de sorte og hvide felter betyder, samt hvor mange kopper kaffe der kan være i kaffemaskinen.

De fleste af eleverne beslutter, at de sorte felter betyder den del af publikum, som gerne vil have kaffe, samt at hele kaffemaskinen indeholder kaffe til en fyldt biograf (80 kopper kaffe). I det illustrerede eksempel er der 61 publikummer, som vil have kaffe, og når kaffemaskinen er $\frac{3}{4}$ fyldt, er der i alt 60 kopper kaffe. I eksemplet skal eleverne for at løse problemstillingen forstå og anvende forholdet mellem brøker og procentregning.

Eleverne opstiller enkeltvis en illustration og en model for udregningen af, om der er nok kaffe i kaffemaskinen.

Derefter skal eleverne først i mindre grupper og dernæst i hele klassen diskutere de udviklede modeller og den tilgang, de har valgt med henblik på at forstå, at der er forskellige måder at gå til en opgave på. Eleverne diskuterer også, hvor meget modellerne adskiller sig fra hinanden. Ofte er der forskel på, om eleverne har udviklet modeller, som er meget detaljerede (hvor alle procenthederne er illustreret) og dermed i mindre grad kan anvendes på andre områder, eller om modellerne er mere generelle modeller (hvor hver fjerdedel er markeret), der også kan anvendes på andre matematiske problemstillinger. Klassediskussionen skal også hjælpe eleverne med at se fordele i at udvikle en model, som hverken er for generel eller for specifik.

Læs mere: Dijk, I. M. A. W. van; B. van Oers, J. Terwel & P. van den Eeden (2003): Strategic Learning in Primary Mathematics Education: Effects of an Experimental Program in Modelling.

I Lindh & Holgersson (2007) undersøges effekten af at integrere LEGO Dacta i undervisningen på svenske 5. og 9. klasses elevers *mathematical literacy* og problemløsningsfærdigheder. LEGO

Dacta er et sæt af redskaber og materialer, hvoraf nogle er LEGO-klodser. Derudover er der en mekanisk del, et sæt sensorer og motorer, en central kontrolenhed, en computer og software med tilhørende opgaveinstruktioner og manualer. Delene kan sættes sammen til simple konstruktioner, eksempelvis en robot. I indsatsen benytter eleverne sig af LEGO Dacta-redskaberne til at visualisere, modellere og konkretisere opgaveløsningerne på de opgaver, der følger med i LEGO Dacta-undervisningsmodulet. I undervisningen arbejder eleverne i mindre grupper om at løse de stillede opgaver, og eleverne samler, programmerer og styrer robotterne via en almindelig computer. Modulet forløber over en periode på 12 måneder, hvor eleverne anvender materialerne i to ugentlige lektioner. For eleverne i 9. klasse integreres anvendelsen af LEGO Dacta i matematikundervisningen, mens anvendelsen af LEGO Dacta foregår i selvstændige undervisningsmoduler for eleverne i 5. klasse. Undervisningen tilrettelægges og gennemføres af elevernes lærere, der forinden indsatsen har modtaget undervisning i brugen af LEGO Dacta.

I Brendefur et al. (2012) er formålet, at underviserne (*early educators*) skal blive bedre til at inddrage matematiske koncepter for børn i førskolealderen. Indsatsen målrettet børnene er ikke detaljeret beskrevet. Det fremgår, at der som led i indsatsen er gruppeaktiviteter i 10-20 minutter eller klasseværelsesaktiviteter. Aktiviteterne omhandler eksempelvis indsamlingsbøsser og lege med træblokke, hvor underviseren sidder sammen med børnene og guider dem igennem aktiviteterne ved at give dem matematiske informationer og spørgsmål. I studiet fremgår samtidig et eksempel på en aktivitet, hvor eleverne skal forstå matematik ved først at bygge en fysisk model og derefter visualisere eller tegne modellen. Underviserne deltager alle i en workshop, som tager udgangspunkt i fire fagområder inden for matematik; tal (*number*), fortolke sammenhænge (*interpreting relationship*), måling (*measurement*) og rumlig ræsonnering (*spatial reasoning*). Workshopen har til hensigt at forbedre underviserens kompetencer inden for matematikområderne, samt at underviserne skal lære at lave aktiviteter baseret på konkrete materialer til at give børnene en tidlig forståelse af matematikken.

Kroesbergen et al. (2004) undersøger effekten af to forskellige undervisningsmetoder, som anvendes i matematik over 11 lektioner. Den ene undervisningsmetode, *Constructivist Instructions* (CI), er opbygget om, at eleverne selv skal opdage løsningsstrategier. I lektionerne fremlægger læreren dagens multiplikationsemne (eksempelvis 6-tabellen), herefter styrer læreren en diskussion blandt eleverne om, hvordan forskellige problemer kan løses. Et andet eksempel fremgår af boksen nedenfor. Eleverne har mulighed for at anvende træblokke til at hjælpe dem med at komme med en løsningsstrategi. Læreren foreslår ingen konkret løsningsstrategi for eleverne, men forsøger at lede diskussionen i en bestemt retning. I indeværende indsats er det altså problemets struktur, og hvordan eleverne vælger at løse det, der er i centrum, og ikke de enkelte svar, som hver elev angiver. Lærerne i indsatsen er derfor mest fokusret på at få eleverne til at fortælle, hvordan de selv vil løse problemet, og hvordan de forstår den matematiske struktur, således at lærerne kan hjælpe eleven med at løse problemet korrekt.

Boks 3-3: Eksempel på indsats hvor der indgår modellering

I studiet undersøges effekten af to forskellige undervisningsmetoder, som anvendes i matematik over 11 lektioner. I boksen er undervisningsmetoden, *Constructivist Instructions* (CI) præsenteret.

Læreren fremlægger dagens matematiske emne og beder derefter eleverne om at byde ind med forskellige løsninger på problemstillingen. Det er lærerens opgave at få en diskussion i gang blandt eleverne om, hvordan man kan løse problemet og dermed ikke præsentere eleverne for en tilgang til problemløsningen.

Eksempel på et problem som læreren spørger eleverne om:

Første spørgsmål er: "Hvordan udregner man, hvor mange hjul der er i alt, hvis man har fire cykler med 2 hjul hver?"

Nogle elever svarer $2+2+2+2$, hvor andre svarer 4×2 og andre igen svarer 2×4 .

Næste spørgsmål er: "Hvor mange hjul er der på to biler med fire hjul hver?"

De fleste elever svarer 2×4 eller $4 + 4$.

Tredje spørgsmål er så: "Hvor mange hjul har fire biler?"

En enkelt elev svarer 2×8 , læreren beder eleven om at forklare hvorfor. Eleven forklarer, at 8 er 2×4 , og det skal man fordoble, og så har man 16 i alt.

Læreren illustrerer derefter med træblokke, hvordan eleven har udregnet problemstillingen og brugt en strategi for at fordoble og dermed anvendt en strategi for at multiplicere.

Læs mere om Constructivist Instructions (CI) i Kroesbergen, Evelyn H.; Johannes E. H. Van Luit & Cora J. M. Maas: (2004) *Effectiveness of Explicit and Constructivist Mathematics Instruction for Low-Achieving Students in the Netherlands*.

Ridlon (2009) undersøger effekten af en undervisningsmetode i matematik, *problem-centered approach* (PCL), sammenholdt med den normale undervisning, (*traditional explain-practice, E-P*). PCL tager udgangspunkt i case- eller projektundervisning, hvor eleverne stilles over for et problem, som enten præsenteres af læreren eller én af eleverne. Derefter arbejder eleverne i grupper om at komme med en løsning på det pågældende problem.

Undervejs i lektionen går læreren rundt mellem de forskellige grupper og stiller spørgsmål, lytter til elevdiskussionerne og får eleverne til at fortælle om deres løsningsstrategi og resultater. Når eleverne efterfølgende samles, præsenteres, diskuteres og vurderes de forskellige løsninger på problemet i plenum. På intet tidspunkt i timen må læreren fortælle, hvad der er den rigtige og forkerte løsning. Den eller de endelige rigtige løsninger vælges af klassen og læreren. Elevernes, og særligt lærerens rolle i undervisningen, er derfor også forskellig fra en traditionel undervisningstilgang. Det handler ikke om lærerstyret tavleundervisning og instruktion i matematikken, men mere om at aktivere og igangsætte eleverne ved at gøre brug af visualisering, modellering og præsentation og samtidig facilitere en god og konstruktiv atmosfære og dialog om de forskellige problemløsningstilgange og -forslag.

Boks 3-4: Eksempel på indsats hvor der indgår flere aktiviteter vedrørende modellering

Indsatsen i Ridlon (2009) omhandler flere forskellige aktiviteter. Herunder er nogle af aktiviteterne beskrevet.

I den første lektion skal eleverne gætte, hvilken matematisk regel læreren anvender på en problemstilling, som læreren opstiller på tavlen. Læreren skriver eksempelvis $4 \rightarrow 8$, hvor pilen illustrerer, at med den regel, som læreren tænker på, bliver det første tal ændret til det sidste tal. Derefter skriver læreren 6, hvor reglen gør, at tallet bliver $6 \rightarrow 12$. Læreren fortsætter indtil én af eleverne råber "regel" og derved indikerer, at de har gættet, at reglen er, at tallet før pilen multipliceres med to.

En anden aktivitet i timerne går ud på, at eleverne får nogle såkaldte udfordringskort, hvorpå der er nogle matematiske spørgsmål, som eleverne skal svare på. Det kan eksempelvis være: 1) Hvis du har 6\$, har du så penge nok til at købe alle disse produkter: mundskyld 1,39\$, tandpasta 0,99 \$, shampoo 1,99\$ og creme 1,6\$. 2) Hvor mange fulde omdrejninger foretager et ur på en dag? 3) Hvad er det gennemsnitlige antal af syninger på en fodbold, når en fodbold af mærket Wilson har 165, en af mærket Spaulding har 144 og en af mærket Wal-Marts har 138 syninger? Eleverne løser udfordringskortene i grupper. Eleverne er i grupper sat sammen med elever, som de er på samme faglige niveau i matematik med.

En tredje aktivitet er centreret om at forbedre elevernes problemløsningsevne, hvor de skal bruge brøker og forholdstal. Problemstillingen lyder: "*Markus og Bobby løb på en rute efter skole. Markus løb 10 runder på 12 minutter og Bobby løb 12 runder på 14 minutter. Hvem løb hurtigst?*" Eleverne bliver ikke præsenteret for en bestemt måde at løse problemet på, men skal i grupper finde hver deres løsning. En gruppe vælger at tegne to cirkler, som de inddeler i dele og markerer, hvor hurtigt de to elever løber. En anden gruppe anvender brøker, hvor de skriver $10/12=0,83$ og $12/14=0,86$ og bagefter sammenligner resultatet for at se, hvem der har det højeste kommatotal, hvilket er den som har løbet hurtigst. En tredje gruppe ændrer på forholdstallet mellem de to brøkopstillinger, således at de opløfter nævnerne i begge til 84. Det betyder, at $10*7=70$ og $12*7=84$, svarende til at Markus løber på 70/84. For Bobby er det $12*6=72$ og $14*6=84$, svarende til at det i alt er 72/84.

Læs mere: Ridlon, Candice L. (2009) Learning Mathematics via a Problem-Centered Approach: A Two-Year Study.

Aktiviteterne i matematiktimerne varierer, men har alle fokus på elevernes måde at udtænke en løsning af problemet på og på de forskellige former for matematiske begreber og koncepter, som eleverne bruger til dette i forskellige sammenhænge.

3.2.3 Resultater og effekter

Samlet set viser fem ud af seks studier, at **modellering har en positiv effekt** på elevers faglige præstationer og/eller progression i læring. Der er forskel på, hvilken effekt studierne måler, men i langt de fleste er der fokus på, om modellering har en effekt på elevers matematiske færdigheder (Ridlon, 2009; Brendefur et al., 2013; Bottge et al., 2004; Dijk et al. 2003; Lindh & Holgersson, 2007). Derudover er det relevant, at størstedelen af studierne i dette tema vurderes at have medium evidensvægt (Brendefur et al., 2013; Bottge et al., 2004; Dijk et al. 2003; Lindh & Holgersson, 2007). Tre af disse dokumenterer en positiv effekt (Brendefur et al., 2013; Bottge et al., 2004; Dijk et al. 2003). Der er der to studier med høj evidensvægt, som begge dokumenterer en positiv effekt (Kroesbergen et al., 2004; Ridlon, 2009). Der er ét studie, hvor indsatsen ingen effekt påviser (Lindh & Holgersson, 2007)

Tabellen nedenfor opsummerer effekterne for indsatserne, som indeværende kortlægning har identificeret under temaet modellering. Resultaterne sammenholdes med de enkelte studiers evidensvægt.

Tabel 3-4: Virkningsfulde mekanismer under temaet modellering

Indsatsernes fokus	Studie	Kontekst	Positiv effekt	Ingen/ negativ effekt	Evidensvægt
- Modellering	Kroesbergen et al., 2004	Grundskole – delvis almindelig skoler og specialskoler	Matematisk problemløsning med både tal og tekstformuleringer	Motivation	Høj
	Ridlon, 2009	Grundskole	Matematiske færdigheder	-	Høj
	Brendefur et al., 2013	Førskolealderen (<i>Head Start</i>)	Matematiske færdigheder	-	Medium
	Bottge et al., 2004	Grundskole	Problemløsning	Matematiske færdigheder (brøkrekning)	Medium
	Dijk et al. 2003	Grundskole	Progression i læringsproces, matematiske færdigheder	-	Medium
	Lindh & Holgersson, 2007	Grundskole	-	Matematiske færdigheder	Medium

Som det fremgår af ovenstående tabel, er der inden for temaet modellering tre studier, som finder en positiv effekt af indsatserne på elevernes matematiske færdigheder (Ridlon, 2009; Brendefur et al., 2013; Dijk et al. 2003). Der er to studier, som ikke finder nogen effekt på elevernes matematiske færdigheder (Bottge et al., 2004; Lindh & Holgersson, 2007). Inden for temaet er der derfor ikke et entydigt billede af indsatsernes effekter på elevernes matematiske færdigheder.

Der er to studier, som viser en positiv effekt af indsatserne på elevernes problemløsningsevne (Bottge et al., 2004; Kroesbergen et al., 2004). Derudover er der et studie, som viser en positiv effekt på elevernes progression i læringsprocesser (Dijk et al., 2003). Et af de førnævnte studier finder ligeledes ingen effekt af indsatsen på elevernes motivation (Kroesbergen et al., 2004).

Bottge et al. (2004) og Kroesbergen et al. (2004) undersøger begge effekterne af, at eleverne skal bygge eller konstruere deres egne modeller for at løse en given problemstilling. I Bottge et al. (2004) er det en skateboardrampe, eleverne skal bygge, og i Kroesbergen et al. (2004) skal eleverne konstruere en model til at udregne, hvor mange kopper kaffe der kan brygges i biografen. Begge studier viser, at indsatserne har en positiv effekt på elevernes evne til at løse matematiske problemer. Fælles for de to studier er, at eleverne selv skal finde en måde at løse problemet på, og at de derudover enten skal tegne eller bygge og præsentere løsningsmodellen. Det betyder, at eleverne selv skal visualisere de forskellige elementer af omverdenskarakter, som indgår i problemet, og dermed forholde sig til alle dele af problemet for at kunne opstille en god og holdbar model. Bottge et al. (2004) har i deres forskningsdesign fokus på at vurdere effekten af indsatsen både på elever med og uden særlige behov. Dog er der i det endelige design for få elever med særlige behov, der indgår i indsatsen, hvorfor de fravælger at beregne de kvantitative resultater for denne målgruppe. I stedet har de casebeskrivelser med to elever med særlige behov med, hvor det fremhæves, at eleverne virker mere engagerede i matematikundervisningen i starten, end de plejer at være, men at de stadig har udfordringer i forhold til at nå alle opgaverne i timerne.

Indsatsen i Dijk et al. (2003) består ligeledes af, at eleverne bliver præsenteret for nogle elementer i en matematisk problemløsning og derefter selv skal konstruere en model for problemløsningen. Konkret skal eleverne udregne mængden af kaffe i en biografkaffemaskine. Forskellen mellem Dijk et al. (2003) og Bottge et al. (2004) samt Kroesbergen et al. (2004) er, at Dijk et al. (2003) undersøger effekten af indsatsen på elevernes progression i læring og ikke på elevernes evne til at løse matematiske problemer. Studiet af Dijk et al. (2003) viser, at indsatsen har positive effekter på elevernes progression i forhold til læring.

Indsatsen i Ridlon (2009) foregår over et helt år og er centreret om, at matematikundervisningen skal være baseret på cases eller projekter og er derfor virkelighedsnære eksempler, hvor eleverne skal anvende deres *mathematical literacy* for at løse problemstillingen. Studiet af Ridlon (2009) viser en **positiv effekt** hos eleverne i indsatsgruppen på deres faglige præstationer. Selv om eleverne i både indsats- og kontrolgruppe viser fremgang fra førtesten til eftertesten, viser eleverne i indsatsgruppen en større fremgang i deres matematikkundskaber og problemløsnings-evner, end eleverne i kontrolgruppen gør. Derudover ses det i studiet, at de elever, som scorer lavest i førtesten i andet undervisningsår, opnår den største fremgang. Det viser, at de fagligt svage elever har de største effekter af indsatsen.

Lindh & Holgersson (2007) undersøger effekten af at anvende LEGO Dacta i undervisningen. Studiet indikerer, at der overordnet set **ingen effekt** er af indsatsen på elevernes matematiske færdigheder. I studiet analyseres resultaterne dog yderligere ved at differentiere mellem eleverne. Analysen indikerer, at de elever, som præsterede dårligst i førtesten, opnår **negative effekter** af indsatsen. Det betyder altså, at det hæmmer elever med særlige behov at deltage i indsatsen. I den kvalitative del finder forfatterne, at eleverne lærer på forskellige måder. Nogle benytter sig af en forsøg-fejl-metode (*trial-and-error*), mens andre benytter sig af en fælleskabsorienteret strategi, hvor de spørger de andre elever til råds. Det viser, at eleverne har forskellige læringstilgange og læringsstrategier, som de med LEGO Dacta får lov til at udfolde, frem for hvis de var blevet præsenteret for en bestemt læringstilgang. I studiet konkluderes de på baggrund af de kvalitative data, at indsatsen støtter op om den enkelte elevs læringsstil, selv om der ingen effekter er af indsatsen. Derudover konkluderes det i studiet, at det, at lærerne har en vejlederrolle, hvor de assisterer eleverne i deres læringsproces, er vigtigt i undervisningen med LEGO, da svære problemer kan bremse elevernes arbejde helt. Desuden finder studiet, at det er vigtigt for eleverne at arbejde i små grupper og fysisk at have god plads til at arbejde.

Indsatsen i studiet af Brendefur et al. 2012 er primært målrettet undervisere (*early educators*) af børn i førskolealderen, men indeholder også aktiviteter for børnene. Studiet indikerer, at der er en **positiv effekt** på børnene i indsatsgruppens generelle matematiske færdigheder. Da indsatsen ikke er tydeligt beskrevet, er det uklart, hvad indholdet af aktiviteterne er, og dermed også hvad der skaber den positive effekt.

3.3 Konkrete materialer

En række studier, der er inkluderet i syntesen, kan grupperes under det overordnede tema **konkrete materialer**. Temaet omhandler indsatser, hvor matematikundervisningen indeholder konkrete materialer, som eleverne skal anvende i deres opgaveløsning. Konkrete materialer dækker blandt andet over terninger, centicubes, LEGO-klodser, sømbræt mv. og er kendetegnet ved at være fysiske elementer, der kan være med til at illustrere matematikken for eleverne. Anvendelsen af konkrete materialer har til hensigt at understøtte eksperimenterende og undersøgende arbejdsmetoder²⁰ og give eleverne *hands-on*-erfaring med matematik.

Karakteren og omfanget af studierne i dette tema varierer en del, men fælles for indsatserne i studierne er, at de alle undersøger, hvordan anvendelse af konkrete materialer indvirker på elevernes *mathematical literacy*, særligt i forhold til matematisk problemløsning.

Der er identificeret **seks studier** i kortlægningen, som indgår i beskrivelsen af temaet om konkrete materialer. Studierne er fremstillet skematisk i oversigtstabellen nedenfor. For en mere udførlig beskrivelse af studierne henvises til abstracts i bilag.

²⁰ Undervisningsministeriet (2009).

Tabel 3-5: Tabel over studier i temaet om konkrete materialer, seks studier i alt

Studie	Land	Indsats	Målgruppe	Omfang	Fagpersoner	Outcome-mål	Stikprøvestørrelse	Design
Bottge et al. (2004)	USA	To undervisningsmetoder i matematikindsatser med virkelighedsnær problemløsning (<i>enhanced anchored instruction, EAI</i>), hvor eleverne selv skal konstruere en model og løsning, og indsatser med systematisk problemløsning (<i>text-based instructions, TBI</i>)	Elever i 6. klasse med og uden særlige behov	Fase 1: 1 uge Fase 2: 6, 11 og 22 uger efter fase 1. Varigheden af fase 2 er ikke nærmere præciseret	Lærer (matematik)	Matematiske færdigheder (brøkgregning) (forskergenereret) og problemløsningsevne (hhv. en tekstbaseret og en videobaseret test) (forskergenereret)	93 elever i 6. klasse	Kvasi-eksperiment
Brendefur et al. (2013)	USA	Professionel udvikling af undervisere i deres undervisningstilgang. Opgaver hvor eleverne skal forstå matematik ved at bygge fysiske modeller, som eleverne skal visualisere, inden eleverne løser matematikopgaven	Børn i dagtilbud med særlige behov (<i>Head Start program</i>)	Lærerne modtager én 8-timers workshop i undervisningsmetoden. Det fremgår ikke, hvad omfanget af indsatsen er for børnene i de 6 måneder	Lærer	Matematiske færdigheder (standardiseret test)	144 børn i 4-årsalderen Indsats: n= 111 børn Kontrol: n= 33 børn	Randomiseret, kontrolleret forsøg
Carbonneau et al. (2013)	USA ²¹	Anvendelse af konkrete materialer i matematikundervisningen	Elever i normalområdet (fra dagtilbud, grundskole og ungdomsuddannelser)	Omfanget er opdelt som følger: Kort indsats: 0-14 dage Mellem indsats: 15-45 dage Lang indsats: 46 dage eller flere	Både lærere og forskere	Matematiske færdigheder, herunder elevernes evne til problemløsning (ikke angivet for de enkelte studier)	55 studier	Systematisk review
Lindh & Holgersson (2007)	Sverige	Undervisningsforløb med LEGO Dacta	Elever i 5. og 9. klasse	Indsatsen forløber over 8 måneder, hvor LEGO Dacta integreres i undervisningen 2 gange om ugen.	Lærer (matematik)	Matematisk test (udviklet med afsæt i de svenske nationale test), problemløsningstest (testen er ikke specificeret)	696 elever fra 5. og 9. klasse Indsats: n= 322, heraf 193 fra 5. klasse og 129 fra 9. klasse Kontrol: n= 374, heraf 169 fra 5. klasse og 205 fra 9. klasse	Kvasi-eksperiment

²¹ I det systematiske review er enkelte studier fra lande, der ligger uden for kortlægningens geografiske afgrænsning.

Studie	Land	Indsats	Målgruppe	Omfang	Fagpersoner	Outcome-mål	Stikprøvestørrelse	Design
Newman et al. (2012)	USA	Skoleindsats med professionel udvikling af lærerne og brug af konkrete materialer i undervisningen	Elever i 4.- 8. klasse	Indsatsen strækker sig over 2 år	Lærere (matematik)	Matematiske færdigheder inden for problemløsning (standardiseret test)	Første eksperiment: 19.626 elever fra 4.- 8. klasse Indsats: n= 10.517 Kontrol: n= 9.109 Andet eksperiment: 18.751 elever fra 4.- 8. klasse Indsats: n= 10.139 Kontrol: n= 8.612	Randomiseret, kontrolleret forsøg
Ordell & Eldholm (2003)	Sverige	Indsats med håndarbejde i matematikundervisningen	Elever i 2. klasse	En hel dag om ugen i en periode på 7 måneder	Lærer (matematik)	Matematiske færdigheder inden for problemløsning (test udviklet af central myndighed for det svenske skolevæsen)	27 elever fra 2. klasse Indsats: n= 15 Sammenligning: n= 12	Etnografisk studie

3.3.1 Forskningen på området

Fire ud af seks studier inden for dette tema er amerikanske. De resterende to studier er fra Sverige (Lindh & Holgersson, 2007; Ordell & Eldholm, 2003).

De fleste studier er baseret på eksperimentelle forskningsdesign. Ud af de seks studier er to af studierne baseret på randomiserede, kontrollerede forsøg og to studier på et kvasi-eksperimentelt design. De resterende to studier er henholdsvis baseret på et systematisk review af studier med eksperimentelle forskningsdesign og på et nordisk etnografisk studie. Langt størstedelen af studierne er derfor karakteriseret ved at være metodisk solide i forhold til at måle effekter af deres indsatser.

Derudover er halvdelen af studierne kendetegnet ved at være målrettet elever på mellemtrinnet og i udskolingen (10-15-årsalderen). Ud af de seks inkluderede studier er der ét studie, hvor indsatsen er målrettet elever i dagtilbud (Brendefur et al., 2013) og ét studie, der er målrettet indskolingen (Ordell & Eldholm, 2003). Det sidste studie er et systematisk review, der dækker indsatser i dagtilbud, grundskole og ungdomsuddannelser (Carbonneau et al., 2013). I forhold til det systematiske review skal det bemærkes, at studierne i reviewet er beskrevet som en samlet pulje. Det er derfor ikke muligt at adskille effekterne for de forskellige målgrupper fra hinanden eller at se særskilt på indsatserne i de enkelte studier.

Et sidste fællestræk er, at de fleste studier har fokus på elever i normalområdet. Der er dog et studie, der undersøger en professionel udvikling af undervisere (*early educators*), der underviser børn i førskolealderen med særlige behov (Brendefur et al., 2013).

Generelt er studierne i temaet om konkrete materialer karakteriseret ved, at indsatserne er meget begrænset beskrevet. Dette skyldes, at lærerne har haft stor metodefrihed i flere af studierne i forhold til anvendelsen af de konkrete materialer. I indsatserne er de konkrete materialer et væsentligt og centralt element, til trods for at det ikke er ekspliciteret, hvordan lærerne skal anvende dem. Så selv om studierne design er metodisk stærke, forekommer der stadig at være stor variation i, hvordan de konkrete materialer er anvendt i indsatserne, hvilket mindsker muligheden for at drage solide konklusioner om indsatsernes effekter.

3.3.2 Indsatser, metoder, praksis og redskaber

I forskningen er der identificeret en række forskellige indsatser, som alle beror på at anvende konkrete materialer i undervisningen, og som alle undersøger effekten på elevernes matematiske færdigheder. Anvendelsen af de konkrete materialer i undervisningen skal ikke ses som et enkeltstående element i indsatserne. Indsatserne beror på en pædagogisk tilgang eller undervisningsform, hvor de konkrete materialer ses som en mulighed for at give elevernes *hands-on*-erfaring med at arbejde med virkelighedsnære redskaber i løsningen af et matematisk problem. Undervisningsformen eller den pædagogiske tilgang er ikke ekspliciteret i studierne, men der lægges i stedet op til, at lærerne selv tilrettelægger brugen af materialerne i undervisningen. Indsatserne i studierne kan overordnet grupperes inden for to kategorier. Den første kategori omfatter tre studier, hvor de konkrete materialer anvendes i matematikundervisningen generelt (Newmann et al., 2012; Ordell & Eldholm, 2003; Brendefur et al., 2013). Den anden kategori omfatter to studier, hvor de konkrete materialer anvendes i et specifikt matematikforløb (Lindh & Holgersson, 2007; Bottge et al., 2004).

Studierne i **den første kategori** omfatter indsatser, hvor **de konkrete materialer anvendes generelt i matematikundervisningen** (Newman et al., 2012; Ordell & Eldholm, 2003; Brendefur et al., 2013). Det systematiske review (Carbonneau et al., 2013) går på tværs af de to kategorier og inddrages derfor afslutningsvis.

Indsatserne i den første kategori er kendetegnede ved at integrere de konkrete materialer i matematikundervisning med henblik på at forbedre elevernes *mathematical literacy* generelt. I

Newman et al. (2012) er målet at forbedre elevernes *mathematical literacy* ved at forbedre lærernes faglige viden og deres instruktioner i *hands-on*- og undersøgelsesbaseret matematik, hvor eleverne arbejder med konkrete materialer. Indsatsen består primært af to elementer. Det første element er professionel udvikling af lærerne, hvor lærerne forud for indsatsen modtager undervisning i indsatsens pensum, der fokuserer på at øge lærernes faglige viden samt at gøre deres instruktioner målrettet *hands-on*- og undersøgelsesbaseret matematik. Lærerne får derudover i løbet af skoleåret mulighed for opfølgende professionelle udviklingssamtaler. Det andet element er inddragelse af programmaterialer og *hands-on*-materialer i undervisningen. Lærerne får udleveret materialerne, som skal anvendes i undervisning i starten af skoleåret. Programmaterialerne består blandt andet af lærer- og elevvejledninger, elevvurderinger, software mv., mens *hands-on*-materialerne består af konkrete materialer, såsom termometre, digitale kameraer og forskellige test-kits, der roterer blandt skolerne i sæt med tre måneders mellemrum. Der er ikke angivet, hvordan materialerne anvendes, men formålet er, gennem udviklingen af lærernes faglighed og ved at give dem konkrete materialer at arbejde med i undervisningen, at løfte undervisningen, så eleverne får bedre instruktioner og får mulighed for at få praktisk erfaring med matematikken og derigennem blive bedre problemløsere. Anvendelsen varierer på tværs af skolerne, og det er ikke hensigten med programmet, at de skal anvendes fuldstændigt ens, men blot at de konkrete materialer skal anvendes i højere grad end tidligere. Det er derfor effekterne af øget anvendelse af konkrete materialer, der undersøges mere end effekten af de specifikke aktiviteter i indsatsen.

Indsatsen i Newman et al. (2012) er målrettet elever i grundskolen, hvor indsatsen i studiet af Brendefur et al. (2013) er målrettet børn i dagtilbud (4-årsalderen) fra familier med lav socioøkonomisk status, men der er alligevel nogle fællestræk på tværs af de to studier. I studiet af Brendefur et al. (2013) bygger indsatsen også på en professionel udvikling af underviserne (*early educators*). Den professionelle udvikling tager udgangspunkt i fire fagområder inden for matematik; tal (*number*), fortolkning af sammenhænge (*interpreting relationship*), måling (*measurement*) og rumlig ræsonnering (*spatial reasoning*). Gennem en workshop med fokus på disse fire fagområder skal underviserne forbedre deres kompetencer. Det er hensigten, at de skal lære at lave aktiviteter i dagtilbuddene baseret på konkrete materialer, som skal give børnene en tidlig forståelse af matematikken. Indsatsen målrettet børnene i studiet af Brendefur et al. (2013) er mangelfuldt beskrevet. Det fremgår dog, at der i dagtilbuddet er gruppeaktiviteter i 10-20 minutter ad gangen, hvor underviseren sidder sammen med børnene og guider dem igennem aktiviteterne ved at give dem matematiske informationer og stille dem spørgsmål løbende i relation til matematik. Aktiviteterne kan eksempelvis bestå i, at børnene leger med indsamlingsbøsser eller træblokke. I studiet fremgår også et eksempel på en aktivitet, hvor børnene skal forstå matematik ved først at bygge en fysisk model og derefter visualisere eller tegne modellen. Idet der er tale om børn i dagtilbud, er modellerne ikke særligt komplekse, men skal give børnene en tidlig forståelse af matematikken. Det fremgår ikke i studiet, om eksemplet er et idealeksemplar eller et eksempel på en aktivitet, børnene foretager sig.

I studiet af Ordell & Eldholm (2003) består indsatsen, ligesom de to foregående studier, i, at eleverne generelt arbejder med konkrete materialer i deres matematikundervisning. Eleverne i dette studie arbejder igennem et skoleår med håndarbejde i deres matematikundervisning. Håndarbejdet består primært af vævning, hvor eleverne skal anvende matematik i deres beregninger af mængder af garn, hvordan væven fungerer o. lign. Et eksempel er, at eleverne får et skema, de skal udfylde. Skemaet ser ud som illustreret nedenfor.

Tabel 3-6: Eksempel på skema

Spørgsmål	Elevernes svar
Garntype	Bomuld
Hvad væves der med?	Tråd eller garn
Hvor mange væveafstande er der?	35/10
Bredden i centimeter	40
Antal tråde	$35 \cdot 4 = 140$
Antal børn	16
Længde vævstykke per barn	60 cm
Længde på frynser	15 cm
Samlet vævlængde	$16 \cdot 75 \text{ cm} = 1200 \text{ cm}$ eller 12 meter

Når eleven har udfyldt dette skema, skal eleven i dialog med læreren forklare sine svar, og læreren kan på den måde følge, hvordan eleven ræsonnerer sig frem til resultatet. Samtidig lærer eleverne at reflektere over deres opgaveløsning. Derefter anvendes skemaet i vævningen, hvor eleverne lærer at anvende matematikken i en virkelig situation. Hele matematikundervisningen i det pågældende år er centreret om håndarbejde, hvor eleverne gennem praktisk arbejde lærer at anvende deres matematiske færdigheder i en virkelig kontekst.

Studierne i **den anden kategori** er kendetegnet ved, at indsatserne omfatter, at **de konkrete materialer anvendes i et konkret matematikforløb** (Lindh & Holgersson, 2007; Bottge et al., 2004).

I studiet af Lindh & Holgersson (2007) undersøges effekten af at integrere LEGO Dacta i undervisningen på svenske 5. og 9. klasses elevers *mathematical literacy* og problemløsningsfærdigheder. LEGO Dacta er et sæt af redskaber og materialer, hvoraf nogle er LEGO-klodser. Derudover er der en mekanisk del, et sæt sensorer og motorer, en central kontrolenhed, en computer og en software med tilhørende opgaveinstruktioner og manualer. Delene kan sættes sammen til simple konstruktioner, eksempelvis en robot. I indsatsen benytter eleverne sig af LEGO Dacta-redskaberne til at visualisere, modellere og konkretisere opgaveløsningerne på de opgaver, der følger med i LEGO Dacta-undervisningsmodulet. I undervisningen arbejder eleverne i mindre grupper om at løse de stillede opgaver, og eleverne samler, programmerer og styrer robotterne via en almindelig computer. For nærmere beskrivelse af indsatsen se afsnit 3.2.2.

I studiet af Bottge et al. (2004) deltager eleverne i et undervisningsforløb, hvor de skal løse matematiske problemstillinger, der er forankret i virkelighedsnære kontekster, der er genkendelige for eleverne. I studiet skal eleverne bygge en skateboardrampe og i processen bruge deres *mathematical literacy*.

Boks 3-5: Eksempel på indsats som anvender konkrete materialer

Indsatsen er forankret i et undervisningsforløb, hvor eleverne skal løse matematiske problemstillinger, som de genkender fra virkelighedsnære kontekster.

Eleverne starter med at se en video, hvor tre elever bygger deres egen skateboardrampe.

Eleverne i forsøget skal herefter udregne mængden af træ, der skal bruges til at bygge rampen, og træmængdens pris. Eleverne i videoen har en mængde penge og træ til rådighed fra start, og eleverne i forsøget skal derfor udregne, hvor meget træ og hvor mange penge de mangler for at kunne bygge en skateboardrampe.

Eleverne i forsøget får stillet træmoduler og en lille model af rampen til rådighed i deres opgaveløsning.

Opgaveløsningen er på den måde forankret i en virkelig situation, hvor eleverne anvender deres matematiske færdigheder gennem et *hands-on*-projekt. På den måde lærer eleverne at anvende deres matematiske færdigheder i virkelige situationer i stedet for blot at anvende dem til at løse abstrakte og konstruerede matematiske opgaver.

Læs mere: Bottge, Brian A.; Mary Heinrichs, Zara Dee Mehta, Enrique Rueda, Ya-Hui Hung & Jeanne Danneker (2004) *Teaching Mathematical Problem Solving to Middle School Students in Math, Technology Education, and Special Education Classrooms*

Fælles for studierne af Lindh & Holgersson (2007) og Bottge et al. (2004) er, at undervisningen er bygget op om et konkret forløb, som lærerne skal følge mere systematisk. Eleverne i denne kategori arbejder i begge studier med et konkret materiale inden for en bestemt defineret kontekst, modsat indsatserne i første kategori, hvor eleverne arbejder med de konkrete læremidler i matematikundervisningen generelt. Her er undervisningsforløbet altså et mere fast koncept, mens læreren i den første kategori kan vælge at integrere de konkrete materialer i undervisningen i flere forskellige sammenhænge, der giver mening for både lærere og elever.

Det systematiske review (Carbonneau et al., 2013) falder **uden for de to kategorier**, da det dækker begge typer af indsats og i højere grad afdækker, hvad der generelt gælder for anvendelse af konkrete materialer.

I reviewet af Carbonneau et al. (2013) er der 55 studier inkluderet, der alle omhandler brugen af konkrete materialer i undervisningen. De undersøger effekterne af konkrete materialer generelt, men også opdelt efter følgende seks parametre:

- *Elevernes alder:* enten 3-6-årige, 7-11-årige eller 12-årige og ældre.
- *Det konkrete materiales grad af relaterbarhed:* enten høj grad (fx legetøjspizza) eller lav grad (fx en rektangulær klods).
- *Grad af instruktionsvejledning* fra læreren til eleverne: enten høj eller lav.
- *Matematisk emne:* enten placé tal efter deres værdi (*place value*), regning, geometri, brøkgregning eller algebra.
- *Type af vejledning:* enten gruppevejledning, hvor indsatsen er implementeret i grupper eller på klasseniveau, eller individuel vejledning, hvor indsatsen er implementeret individuelt, hvor eleven fx er taget ud af klassen.
- *Omfanget af indsatsen:* enten en kort (0-14 dage), en mellemlang (15-45 dage) eller en lang (46 dage eller mere) indsats.

Som tidligere nævnt samles studierne, således at det ikke er muligt at identificere mekanismerne i de enkeltstående indsatser. Resultaterne af reviewet er derfor opdelt efter ovenstående parametre i stedet for opdelt på indsatser.

3.3.3 Resultater og effekter

Samlet set tegner fem ud af de seks studier i indeværende tema et billede af, at indsatser, hvor eleverne arbejder med konkrete materialer i undervisningen, har en positiv effekt på elevers matematiske evner inden for problemløsning. Den positive effekt af at give eleverne mulighed for at undersøge og løse matematiske problemstillinger med konkrete materialer dokumenteres af to studier af høj forskningsmæssig kvalitet og tre studier af medium forskningsmæssig kvalitet.

Tabellen nedenfor opsummerer de virkningsfulde mekanismer, som indeværende kortlægning har identificeret under teamet om konkrete materialer. Resultaterne sammenholdes endvidere med de enkelte studiers evidensvægt.

Tablet 3-7: Virkningsfulde mekanismer under temaet om konkrete materialer

Indsatsernes fokus	Studie	Kontekst	Positiv effekt	Ingen effekt	Evidensvægt
De konkrete materialer anvendes generelt i matematikundervisningen	Newman et al. (2012)	Grundskolen	Matematisk problemløsning	-	Høj
	Brendefur et al. (2013)	Dagtilbud	Matematiske færdigheder	-	Medium
	Ordell & Engholm (2003)	Grundskolen	Matematiske færdigheder	-	Medium
De konkrete materialer anvendes i et konkret matematikforløb	Lindh & Holgersson (2007)	Grundskolen	-	Matematiske færdigheder inden for problemløsning	Medium
	Bottge et al. (2004)	Grundskolen	Matematisk problemløsning	-	Medium
-	Carbonneau et al. (2013) ²²	Dagtilbud, grundskolen og ungdomsuddannelser ²³	Matematiske færdigheder	-	Høj

Som det fremgår af tabellen, viser der sig et entydigt billede af, at når de konkrete materialer anvendes generelt i matematikundervisningen, er der en positiv effekt på elevernes matematiske færdigheder. Modsat viser tabellen, at når de konkrete materialer anvendes i et konkret matematikforløb, varierer effekten mellem indsatser fra ingen til en positiv effekt. Det systematiske review understøtter konklusionen om, at anvendelsen af konkrete materialer har en positiv effekt på elevernes matematiske færdigheder.

Studierne, hvor de konkrete materialer anvendes generelt i matematikundervisningen, finder alle en positiv effekt på elevernes matematiske færdigheder. I Newman et al. (2012) er der positive resultater for alle eleverne (4.-8. klassetrin) et år efter deltagelse i indsatsen. To år efter indsatsen er der også positive effekter af indsatsen, dog i mindre grad end forventet. I kraft af at det ikke er tydeligt, hvordan den *hands-on*- og undersøgelsesbaserede matematik har fundet sted i de tre måneder, som indsatsen varer, er det ikke muligt at præcisere, hvordan de konkrete materialer præcis bør anvendes i matematikundervisningen. I stedet kan det konstateres, at brugen af konkrete materialer, såsom termometre, digitale kameraer og forskellige test-kits, har en positiv effekt på elevers matematiske færdigheder.

²² I det systematiske review er enkelte studier fra lande, der ligger uden for kortlægningens geografiske afgrænsning.

²³ To af studierne er for college-studerende.

Studiet af Ordell & Engholm (2003) indikerer ligeledes, at brugen af håndarbejde, som et konkret materiale i matematikundervisningen, har en positiv betydning i forhold til at stimulere elevernes praktiske arbejde og giver eleverne passende udfordringer i forhold til den teoretiske forståelse af matematikken. Samtidig indikerer studiet, at eleverne trænes i at overføre viden mellem abstrakte matematiske modeller og den konkrete virkelighed og især i forberedelsen af vævningen lærte eleverne at tænke problemorienteret. I forberedelsen skal eleverne nemlig finde ud af alle de forhold, som skal beregnes på forhånd, for at kunne løse opgaven med vævning, fx hvor meget garn de skal bruge.

Studiet af Brendefur et al. (2013) indikerer ligeledes, at brugen af konkrete materialer har en positiv effekt på børn i førskolealderens matematiske færdigheder. I kraft af at indsatsen i studiet af Brendefur et al. (2013) primært er målrettet undervisere (*early educators*) til børn i dagtilbud, og at aktiviteterne, som er målrettet børnene, er begrænset beskrevet, er det uklart, hvad indholdet af aktiviteterne er, og dermed også hvad der skaber den positive effekt.

I den anden gruppe af studier, hvor de konkrete materialer anvendes i et konkret matematikforløb er der blandede resultater. Studiet af Bottge et al. (2004) indikerer, at indsatsen har en positiv effekt på elevers matematiske problemløsning, hvorimod studiet af Lindh & Holgersson (2007) indikerer, at der ingen overordnede effekter er af indsatsen på elevernes matematiske problemløsning. I studiet af Bottge et al. (2004) finder de, at indsatsen, som er centreret om, at eleverne skal anvende deres *mathematical literacy* til at bygge en skateboardrampe ud af træ og andre materialer, har en positiv effekt. I studiet af Lindh & Holgersson (2007) skal eleverne anvende LEGO Dacta i undervisningen. Selv om der ingen overordnede effekter er af indsatsen, så indikerer analyserne, at den andel af 5. klasses eleverne i indsatsgruppen, der klarede sig dårligst i de nationale tests i matematik det forgående skole (4. klasse), klarer sig bedre i matematiktesten i 5. klasse, end den andel af elever i kontrolgruppen der også præsterede dårligst i de nationale test skoleåret før. Det tyder således på, at anvendelsen af LEGO Dacta i undervisningen kan forbedre de svageste elevers *mathematical literacy*. Effekten gælder dog ikke for 9. klasses elevernes *mathematical literacy*, ej heller for 5. og 9. klasses elevernes problemløsningsfærdigheder.

Det systematiske review viser, at der er en lav til medium effekt af at anvende konkrete materialer i matematikundervisningen på elevernes færdigheder, sammenlignet med matematikundervisning der udelukkende anvender abstrakte symboler som eksempelvis ligninger. Generelt viser studiet, at der er forskel mellem elever på forskellige alderstrin, hvor der generelt er størst effekt for elever i aldersgruppen 7-11 år. Derudover viser studiet, at der er størst effekt af en kort eller mellemlang indsats, og at effekten er størst, hvor det er en lærer, der implementerer indsatsen (frem for en forsker). Det systematiske review viser ligeledes – på outcomemålet *evnen til problemløsning* – at der er større effekt af at benytte en høj grad af instruktionsvejledning og af henholdsvis kort og mellemlang indsats frem for en lang indsats. Samlet set viser det systematiske review, at der er positive effekter af at anvende konkrete materialer i matematikundervisningen. Det er dog ikke muligt at præcisere, hvordan de konkrete materialer skal anvendes på baggrund af det systematiske review.

3.4 It-understøttet læring

En række af de i syntesen inkluderede studier kan grupperes under det overordnede tema **it-understøttet læring**. Fælles for disse studier er, at de alle undersøger effekten af at benytte it-baserede programmer som et hovedelement i deres indsats for at forbedre eleverns *mathematical literacy*.

Karakteren og omfanget af de indsatser, som falder ind under temaet om it-understøttet læring, varierer betydeligt, men studierne beror imidlertid på en gennemgående antagelse om, at man ved brug af it-baserede programmer har muligheder for forholdsvis enkelt at individualisere undervisningen, således at den imødekommer den enkelte elevs behov.

Der er identificeret **fem studier** i forbindelse med kortlægningen, der relaterer sig til temaet om it-understøttet læring i matematik. Studierne er fremstillet skematisk i oversigtstabellen nedenfor og beskrives mere udførligt i afsnittet under tabellen.

Tabel 3-8: Tabel over studier tilhørende temaet om it-understøttet læring, i alt fem studier

Studie	Land	Indsats	Målgruppe	Omfang	Fagpersoner	Outcome-mål	Stikprøvestørrelse	Design
Fede (2010)	USA	Undervisningsforløb i et computerbaseret undervisningsprogram i matematik, der lægger særlig vægt på systematisk problemløsning (skemabaserede instruktioner)	Elever med særlige behov (fagligt svage i forhold til problemløsning)	12 uger, 45 minutter 2 gange om ugen	Lærer (matematik, som normalt anvender computerprogrammet)	Matematiske færdigheder (MCAS og GMA-DE ²⁴) (standardiserede test), fremskridt samt angst for matematik (forskergenereret test)	32 elever i 5. klasse Indsats: n= 16 Kontrol: n=16	Randomiseret, kontrolleret forsøg
Harskamp & Suhre (2007)	Holland	Et undervisningsforløb med et computerprogram, der er udarbejdet på baggrund af Schoenfelds teori om problemløsning	Gymnasieelever	14 lektioner a 50 minutter fordelt på 3 perioder af 2 uger	Lærer (erfarne matematiklærere uden erfaring med computerprogrammet)	Matematisk problemløsning (forskergenereret)	198 gymnasieelever Indsats: n = 91 Kontrol: n = 107	Kvasi-eksperiment
Nguyen et al. (2006)	USA	Indsats med fokus på online opgaveløsning	Udskoling (7. klasse)	9 lektioner a 30 minutter fordelt over 3 uger	E-læring	Elevers tiltro til egne matematiske evner (forskergenereret)	74 elever i 7. klasse Indsats: n= 41 Kontrol: n= 33	Kvasi-eksperiment
Panaoura (2012)	Cypern	Indsats med fokus på systematisk problemløsning (matematisk problemløsningsmodel), som nedbryder problemløsning i en række forbundne faser gennem et e-læringsværktøj	Mellemtrin (5. klasse)	20 individuelle lektioner (individual meetings), hvor eleverne via e-læringshjemesiden blev trænet i den matematiske model for problemløsning. Længden og varigheden af lektionerne fremgår ikke af artiklen	E-læring	Tiltro til egne matematiske evner (<i>self-efficacy</i>) (forskergenereret test), selvregulerende adfærd (forskergenereret test), matematiske præstationer (der er ikke præciseret, om testen er forskergenereret eller standardiseret)	255 elever i 5. klasse Indsats: n=107 Kontrol: n=148	Kvasi-eksperiment
The Preschool Curriculum Evaluation Research initiative (PCER, 2008)	USA	Et pensum bestående af forskellige aktiviteter til små grupper med fokus tal, mængder og geometriske former. Halvdelen af tiden benyttes et computerprogram	Førskole børn	4 lektioner a 20 minutter i 36 uger. I halvdelen af lektionerne benyttes et computerprogram	Førskole lærer	Matematiske færdigheder (standardiseret test), tidlig matematisk udvikling (standardiseret test) og forståelse af geometriske former (standardiseret test)	316 børn i førskolealderen Indsats: n= 159 Kontrol: n= 157	Randomiseret, kontrolleret forsøg

²⁴ MCAS er *The State Mathematic Assessment test, Massachusetts Comprehensive Assessment System*, og GMADE er *The Group Mathematics and Diagnostic Evaluation*. Hvor der testes følgende: *Concepts and communication, Operations and computations, and Process and applications*.

3.4.1 Forskningen på området

Forskningen relateret til it-understøttet læring er relativt forskellig, men har dog en række fælles karakteristika.

Tre af studierne (Fede 2010; Nguyen et al. 2006; The Preeschool Curriculum Evaluation Research initiative (herefter PCER) 2008) stammer fra USA. Ud over disse studier beror temaet på et studie fra Cypern (Panaoura, 2012) og et fra Holland (Harskamp & Suhre 2007). Der er ingen studier fra Danmark eller de øvrige nordiske lande.

Studierne er alle baseret på et eksperimentelt design. Tre studier har et kvasi-eksperimentelt design (Harskamp & Suhre 2007; Nguyen et al., 2006; Panaoura, 2012), og to studier er randomiserede, kontrollerede forsøg (Fede 2010; PCER 2008).

Studierne inden for temaet har forskellige målgrupper, der varierer fra førskolealderen til elever i gymnasiet, ligesom indsatserne også er rettet mod elever på et alderssvarende fagligt niveau såvel som fagligt svage elever.

3.4.2 Indsatser, metoder, praksis og redskaber

Der benyttes fem forskellige computerprogrammer i de fem studier, som indgår i indeværende tema. Nogle af computerprogrammerne har forskerne bag studierne selv udviklet i forbindelse med studiet (Harskamp & Suhre 2007; Nguyen, 2006; Panaoura, 2012), mens andre er færdigudviklede computerprogrammer, som forskerne har udvalgt til brug i indsatsen (Fede, 2010; PCER 2008). De færdigudviklede computerprogrammer adskiller sig fra de selvudviklede programmer ved, at de ikke er webbaserede, men selvstændige programmer, hvor der er lagt et større arbejde i det grafiske design. To ud af de tre selvudviklede computerprogrammer (Fede, 2010; PCER 2008) er webbaserede programmer, der har et simpelt grafisk design. Det sidste selvudviklede computerprogram (Harskamp & Suhre, 2007) er ikke webbaseret og har et mere omfattende grafisk design end de to webbaserede. De to færdigudviklede computerprogrammer, som har et veludviklet grafisk design, henvender sig til den yngste del af temaets målgruppe. I dette program indgår interaktive animerede figurer i modsætning til de andre computerprogrammer, der består af tekst og regnestykker samt enkelte sort/hvide-illustrationer.

Den it-understøttede læring, der belyses i studierne, kan kategoriseres i to overordnede indsats-typer:

1. Systematisk problemløsning gennem computerprogrammer (Fede, 2010; Harskamp & Suhre, 2007; Panaoura, 2012).
2. Varierende opgaver og øjeblikkeligt resultat ved hjælp af computerprogrammer (Nguyen, 2006; PCER, 2008).

Systematisk problemløsning gennem computerprogrammer består af studier, der har anvendt forskellige computerprogrammer for at lære eleverne en bestemt tilgang til at løse matematiske problemstillinger. Fælles for studierne i temaet er, at deres mål er at lære eleverne en metakognitiv tilgang til matematiske problemstillinger, der går ud på først at identificere og forstå problemet, dernæst vælge eller udvikle en løsningsstrategi og til sidst løse problemet og evaluere svaret samt eventuelt problemløsningsprocessen. Fokus i dette afsnit er på computerprogrammets funktion som et "redskab" i undervisningen i problemløsning, der kan give hurtig feedback og "fastholde" eleverne på de forskellige trin i den strategiske tænkning.

Studiet af Fede (2010) undersøger effekten af et computerbaseret program, som lægger vægt på, at eleverne gennem en metakognitiv tilgang skal tillære sig en skematisk problemløsnings-tilgang, som gør dem i stand til at genkende strukturen i matematiske problemer og herefter at løse dem. Computerprogrammet er opdelt i tre moduler med fokus på henholdsvis: 1) plus og minus, 2) multiplikation og division samt 3) avanceret multiplikation og division. Eleverne bliver i

computerprogrammet guidet gennem problemløsningen, således at de lærer at gennemgå en række systematiske faser i den matematiske problemløsning. Når eleverne løser en opgave, får de at vide, hvorvidt den er rigtigt eller forkert løst. Computerprogrammet justerer herefter de øvelser, eleven løbende skal udføre i forhold til, hvordan eleven har klaret sig i tidligere opgaver. For at kunne bevæge sig videre til et nyt modul er det påkrævet at score mindst 85 pct. i den afsluttende øvelsesdel to gange i træk. Således sørger computerprogrammet for, at elever arbejder med netop den type opgaver, de har svært ved.

Studiet af Harskamp & Suhre (2007) er opbygget om en metakognitiv strategi bestående af en fire-trins-problemløsningsstrategi, som eleverne lærer at anvende gennem et computerprogram. Indsatsen er rettet mod elever i gymnasiet. De fire trin er: 1) Læs og analyser problemet, 2) identificer, hvilken matematisk viden der skal anvendes, 3) udvikl og implementer en løsningsplan, og 4) tjek resultatet. Undervejs kan gymnasieeleverne i computerprogrammet benytte sig af instruktionshints for hvert trin i problemløsningen, hvor der er mulighed for at vælge forskellige løsningsmetoder. På den måde kan gymnasieeleverne selv vælge graden af instruktionsniveau til at støtte opgaverne bedst. Et eksempel på en opgave er, at gymnasieeleverne bliver bedt om at finde ud af, hvor hurtigt et fly flyver. Gymnasieeleverne har oplysninger om, hvor hurtigt flyet flyver i normalt vejr, og hvor stor vindhastigheden er. For at løse denne opgave kan eleverne få et hint, som hjælper dem med at løse opgaven, eksempelvis: *"Du skal trække hastigheder fra hinanden"*, og/eller få yderligere information, hvis første hint ikke er nok, eksempelvis: *"Du skal trække vindhastigheden fra den maksimale hastighed i normalt vejr"*. På den måde får eleven de hints og den yderligere information, der er nødvendig, for at den enkelte elev kan løse den matematiske problemstilling korrekt med den hjælp, de har behov for. Computerprogrammet har derved mulighed for at tilpasse læring og støttemuligheder til elevernes individuelle behov og niveau.

I studiet af Panaoura (2012) benyttes en model for matematisk problemløsning, der går ud på at nedbryde problemløsningen i en række forbundne faser, også her igennem en metakognitiv tilgang. Hver fase indeholder forskellige elementer og udfordringer, som eleverne skal tage stilling til (se afsnit 3.1.2 for en beskrivelse af indsatsen). Computerprogrammet giver løbende eleverne feedback og hints, der er designet til at gøre eleverne opmærksomme på, hvilken fase af problemløsningen de er i. Det fremgår ikke nærmere af studiet, hvorledes feedbacken og de forskellige hints er udformet.

De forskellige computerprogrammer bliver således brugt til at sikre, at eleverne gennemgår de forskellige faser i den metakognitive tilgang til matematisk problemløsning. Det er generelt for studierne i kategorien om læring af systematisk problemløsning, at målet med brugen af computerprogrammer er, at eleverne skal lære de forskellige problemløsningsmetoder grundigt og blive så trygge ved dem, så de fremover vil bruge dem automatisk – også uden hjælpende hints fra computerprogrammet. Det ses blandt andet ved, at effekten i alle studierne måles med test, der ikke involverer computerprogrammer.

Boks 3-6: Eksempel på indsats hvor computerprogrammer anvendes

Eleverne, der deltager i studiet af Fede 2010, undervises ved hjælp af computerprogrammet Go Solve Word Problems.

GO Solve Word Problems er et software program, der er designet til at skulle forbedre elevens problemløsningsfærdigheder. Programmets udviklere lægger særligt vægt på, at eleverne lærer at genkende strukturen i matematiske problemer (schema-based instructions), der skal få eleverne til at tænke i kategorier af opgaver i stedet for at se hver opgave som ny og separat fra de andre. Programmet består af tre moduler:

- i) Plus og minus
- ii) Multiplikation og division
- iii) Avanceret multiplikation og division.

Undervisningen foregår via programmets interaktive vejledninger, som findes for hvert modul. Hver vejledning afsluttes med, at programmet giver eleven feedback på, hvordan eleven har klaret sig igennem vejledningen. Programmet er i stand til at justere de øvelser, som eleven løbende skal udføre, i forhold til hvordan eleven har klaret sig i tidligere opgaver (det adaptive princip). Hvert modul afsluttes med, at eleven skal løse en række problemløsningsopgaver, som eleven stiftede bekendtskab med i vejledningen. Det kan, ifølge manualen til programmet, tage imellem tre til fem timer at nå til et moduls afsluttende opgavedel. For at kunne bevæge sig videre til et nyt modul er det påkrævet at opnå mindst 85 pct. rigtige svar i den afsluttede øvelsesdel to gange i træk.

Læs mere: Fede, Jessica (2010): "The Effects of GO Solve Word Problems Math Intervention on Applied Problem Solving Skills of Low Performing Fifth Grade Students".

Variierende opgaver og øjeblikkeligt resultat ved hjælp af computerprogrammer udgøres af to studier (Nguyen, 2006 og PCER, 2008), der undersøger effekten af ved hjælp af computerprogrammer at variere henholdsvis opgaveformuleringer og opgaveudformninger, samt at eleven modtager øjeblikkeligt svar efter opgaveløsning på henholdsvis elevernes indstilling til matematik og elevernes matematiske færdigheder.

I studiet af Nguyen (2006) benytter eleverne således et computerprogram, der stiller tekst- og talbaserede opgaver med samme fokus, eksempelvis brøkgregning, hvor der hele tiden varieres i teksten og tallene. Når eleverne løser en opgave, får de straks at vide, hvorvidt den er løst korrekt. Hvis den ikke er det, får de det korrekte svar med mellemregninger, så de kan se, hvad det korrekte svar er, og hvordan man kommer frem til dette svar. Derudover danner computerprogrammet automatisk svarprocenter på rigtige og forkerte svar og giver eleven og læreren tilbagemelding om, hvilket fokus de opgaver har, som eleven oftest laver fejl i. På den måde bliver eleven og læreren øjeblikkeligt opmærksom på, hvilke områder eleven er svagest indenfor.

I studiet af PCER (2008), som omhandler brug af computere, variation i opgaver og feedback, er målgruppen børn i førskolealderen, hvilket gør, at opgaverne er meget simple. Eksempelvis bliver barnet i en del af programmet bedt om at klikke på en bestemt figur. Hvis eleven klikker på en forkert figur, gør computerprogrammet opmærksom på det. For hver opgave varierer figurene og det grafiske layout. Den umiddelbare feedback består her i, at hvis der vælges en forkert figur, gør computerprogrammet opmærksom på, at det er forkert. Barnet kan således ikke komme videre til næste opgave, før de har lært at klikke på den rigtige figur.

3.4.3 Resultater og effekter

Der kan i studierne, der udgør temaet om it-understøttet læring, identificeres enkelte effektive indsatser.

Tabellen nedenfor opsummerer de virkningsfulde mekanismer, som er identificeret i kortlægningen inden for temaet om it-understøttet læring. I tabellen sammenholdes resultaterne desuden med de enkelte studiers evidensvægt.

Table 3-9: Virkningsfulde mekanismer under temaet it-understøttet læring

Indsatsernes fokus	Studie	Kontekst	Positiv effekt	Ingen/negativ effekt	Evidensvægt
Systematisk problemløsning gennem computerprogrammer	Fede (2010)	Grundskole	Matematiske færdigheder (MCAS ²⁵) og fremskridt	Matematiske færdigheder (GMADE ²⁶) og angst for matematik	Høj
	Harskamp & Suhre (2007)	Gymnasium	Matematisk problemløsning	-	Høj
	Panaoura (2012)	Grundskole	Tiltro til egne matematiske evner (self-efficacy), selvregulerende adfærd, matematiske præstationer	-	Mellem
Variierende opgaver og øjeblikkeligt resultat ved hjælp af computerprogrammer	Nguyen et al. (2006)	Grundskole	Drenges tiltro til egne matematiske evner	Pigernes tiltro til egne matematiske evner	Høj
	The Pre-school Curriculum Evaluation Research initiative (2008)	Førskole	Forståelse af geometriske former og tidlig matematisk udvikling for børn i dagtilbud	Matematiske færdigheder og tidlig matematisk udvikling for børn i børnehave	Mellem

I studierne, der udgør kategorien **systematisk problemløsning gennem computerprogrammer**, finder to studier med høj evidensvægt (Fede, 2010; Harskamp & Suhre, 2007) og et med mellem evidensvægt (Panaoura, 2012), at it-understøttet undervisning med fokus på læring af systematisk problemløsning har en positiv effekt på elevernes matematiske problemløsning, præstationer og kompetence til problemløsning. To af studierne i samme kategori undersøger ligeledes, om der er en effekt på elevernes indstilling til matematik, altså hvorvidt de er trygge ved og har tiltro til egne matematiske evner. Et studie med høj evidensvægt (Fede, 2010) finder, at eleverne hverken i mindre eller i højere grad føler utryghed i forhold til at benytte matematikken, mens et studie med mellem evidensvægt (Panaoura, 2012) finder, at eleverne får en øget tiltro til egne matematiske evner.

Det er kendetegnende for de virkningsfulde mekanismer, der er beskrevet ovenfor, at de har fokus på, at eleverne lærer en form for systematisk tilgang til matematisk problemløsning. Således tyder det på, at brugen af it-understøttet undervisning effektivt kan kombineres med et mål om at tillære eleverne en måde, hvorpå de kan tilgå matematiske problemstillinger.

Der findes i studierne fra kategorien **variierende opgaver og øjeblikkeligt resultat ved hjælp af computerprogrammer** ikke noget entydigt svar på, om det at variere opgaver og give eleverne et øjeblikkeligt resultat ved hjælp af computerprogrammer forbedrer deres matematiske færdigheder eller deres tiltro til egne matematiske evner. Således finder studiet med høj evidensvægt (Nguyen et al., 2006), som har fokus elevernes tiltro til egne matematiske evner, at der ingen effekt er af deres indsats på dette område, når de sammenligner deres kontrol- og indsatsgruppe. Når data analyseres opdelt på køn, finder de til gengæld, at der er en positiv effekt på drengenes tiltro til egne matematiske evner, og at der til dels er en negativ effekt på pigernes

²⁵ MCAS er *The State Mathematics Assessment test, Massachusetts Comprehensive Assessment System*.

²⁶ GMADE er *The Group Mathematics and Diagnostic Evaluation*, og der testes bl.a. følgende: *Concepts and communication, Operations and computations, and Process and applications*.

tiltro til egne matematiske evner som resultat af indsatsen. Studiet med mellem evidensvægt (PCER, 2008), som har fokus på matematiske færdigheder, finder, at der er en positiv effekt på elevernes forståelse af geometriske former. For de yngste elever finder de til dels en effekt på deres generelle matematiske udvikling. En effekt der dog ikke er konsistent i de to forskellige test heraf.

Ved at give eleverne individualiserede hints og feedback under og efter problemløsningen sørger computerprogrammerne for at sikre, at alle eleverne gennemgår og forstår de trin, der er i den systematiske problemløsning. På den måde kan eleverne vænne sig til at benytte den givne systematiske problemløsningsstrategi i løsning af alle matematiske problemer, de fremadrettet skal løse.

De forskellige før- og eftermålinger gennemføres alle uden brug af computerprogrammerne. Der påvises altså en positiv effekt, selv om eleverne ikke gør brug af computerprogrammerne, som hjælper dem med at følge problemløsningsstrategiens trin. Det kan derfor tyde på, at eleverne har tillært sig den systematiske problemløsningsstrategi og benytter den i løsning af matematiske problemer uden brug af computerprogrammerne til at støtte dem. Effekterne kan ligeledes skyldes, at det ved hjælp af computerprogrammerne i høj grad har været muligt at individualisere undervisningen. Dermed kan den enkelte elev arbejde med netop det område, som eleven har svært ved. Computerprogrammerne formår at identificere elevens svage områder og udvælge opgaver, der kan styrke eleven i forhold til dette.

På næste side følger præsentationen af det tema, der kobler sig til fokusområdet om elevs tiltro til egne matematiske evner.

ELEVERS TILTRO TIL EGNE MATEMATISKE EVNER

Som indledningsvis præsenteret er der i denne kortlægning fokus på, hvilke metoder og indsatser der har effekt på eller betydning for elevers *mathematical literacy*. I kortlægningen anvendes betegnelsen *mathematical literacy* som en fælles betegnelse for matematikkompetencer, forstået både som det at kunne anvende sine matematiske kompetencer og det at ville og det at tro på at kunne anvende sine matematiske kompetencer. Hvor tidligere temaer har fokuseret på den del, der omhandler elevers kompetencer inden for anvendt matematik, er der i dette afsnit af kortlægningen fokus på den del, der omhandler elevers tiltro til egne matematiske evner, oftest forstået som *self-efficacy* i de inkluderede studier. Som det også indledningsvis er defineret, skal *self-efficacy* forstås som elevers vilje til at anvende matematiske færdigheder og elevers tiltro til, at de har evnerne til at løse en matematisk problemstilling korrekt. Temaerne i denne del af kortlægningen omhandler derfor studier, der undersøger indsatser effekt på elevers tiltro til egne matematiske evner.

3.5 Bevidsthed om egen læring

Temaet **bevidsthed om egen læring** omhandler indsatser, hvor eleverne skal reflektere over og evaluere deres matematiske færdigheder inden for problemløsning og/eller evner til at overføre viden fra en kontekst til en anden. Samtidig omhandler indsatserne det, at eleverne får feedback på deres færdigheder og læring. Målet er derigennem at gøre eleverne bevidste om egen læring og egne læreprocesser.

Karakteren og omfanget af studierne i dette tema varierer en del, men fælles for indsatserne i studierne er, at de alle undersøger, hvad der har betydning for elevers tiltro til egne matematiske evner.

Der er identificeret **otte studier** i kortlægningen, som indgår i beskrivelsen af temaet om bevidsthed om egen læring. Studierne er fremstillet skematisk i oversigtstabellen nedenfor. For en mere udførlig beskrivelse af studierne henvises til abstracts i bilag 1.

Tabel 3-10: Tabel over studier i temaet om bevidsthed om egen læring, i alt otte studier

Studie	Land	Indsats	Målgruppe	Omfang	Fagpersoner	Outcomemål	Stikprøvestørrelse	Design
Balan (2012)	Sverige	Indførelse af en formativ evalueringspraksis	Gymnasieelever	3 lektioner a 80 minutter om ugen det første år	Lærere (matematik)	Matematisk problemløsning (svenske nationale test) og elevernes tiltro til egne matematiske evner (forskergenereret test)	45 gymnasieelever Indsats: n=21 Kontrol: n=24	Randomiseret, kontrolleret forsøg
Clarke et al. (2004)	USA	Indførelse af et problem-baseret matematikpensum, hvor eleverne er en aktiv del af undervisningen	Gymnasieelever	Indsatsen består af moduler af 5 ugers varighed. Indsatsens samlede længde fremgår ikke	Lærere (matematik)	Matematiske færdigheder (standardiseret test) og elevernes tiltro til egne matematiske evner (forskergenereret test)	300 gymnasieelever Indsats: n=174 Kontrol: n=126	Kvasi-eksperiment
Linnenbrink (2005)	USA	Anvendelse af forskellige pædagogiske tilgange til læringsmål i matematik	Mellemtrin (5. og 6. klasse)	5 uger	Lærere (matematik)	Matematiske færdigheder (eksamenstest i pensum) og elevernes tiltro til egne matematiske evner (standardiseret test)	237 elever i 5. og 6. klasse Indsats 1: n=52 Indsats 2: n=92 Indsats 3: n=93	Kvasi-eksperiment
Mason & Scrivani (2004)	Italien	Indsats med fokus på at skabe et godt læringsmiljø i klassen, herunder undervises eleverne blandt andet i en femtrins-problemløsningsstrategi	Mellemtrin (5. klasse)	12 lektioner a 1,5 time over 3 måneder	Lærere (matematik)	Matematisk problemløsning (forskergenereret test) og tiltro til egne matematiske evner (<i>self-efficacy</i>) (forskergenereret test)	86 elever i 5. klasse Indsats: n=46 Kontrol: n=40	Randomiseret, kontrolleret forsøg
Nguyen et al. (2006)	USA	Indsats med fokus på online opgaveløsning	Udskoling (7. klasse)	Tre uger, hvor eleverne 3 gange om ugen skal løse 30 minutters web-baseret opgavesæt	E-læring*	Elevers tiltro til egne matematiske evner (forskergenereret)	74 elever fra 7. klasse Indsats: n=41 Kontrol: n= 33	Kvasi-eksperiment
Panaoura (2012)	Cypern	Indsats med fokus på at træne elever i systematisk problemløsning gennem et e-læringsværktøj.	Mellemtrin (5. klasse)	20 individuelle lektioner. Indsatsens varighed og længden af lektionerne fremgår ikke	E-læring*	Matematiske færdigheder og elevernes tiltro til egne matematiske evner (forskergenereret test)	255 elever i 5. klasse Indsats: n=107 Kontrol: n=148	Kvasi-eksperiment

Studie	Land	Indsats	Målgruppe	Omfang	Fagpersoner	Outcomemål	Stikprøvestørrelse	Design
Ramdass (2009)	USA	Undervisning i strategisk træning og selvrefleksion	Mellemtrin (5. klasse)	60 minutter	Forsker	Matematiske færdigheder og elevernes tiltro til egne matematiske evner (forskergenereret test)	88 elever i 5. klasse Indsats 1: n=22 Indsats 2: n=22 Indsats 3: n=22 Kontrol: n=22	Randomiseret, kontrolleret forsøg
Stoeger & Ziegler (2010)	Tyskland	Undervisningsforløb med udgangspunkt i, at eleverne skal arbejde ud fra et læringskoncept om selvregulering	Mellemtrin (4. klasse)	5 ugers træning (25 dage). Det fremgår ikke, hvor lang tid træning varer dagligt	Lærere (matematik)	Elevernes tiltro til egne matematiske evner (forskergenereret test)	201 elever i 4. klasse Indsats: n=100 Kontrol: n=101 ²⁷	Randomiseret, kontrolleret forsøg

Note: * Eleverne arbejder for sig selv ved en computer.

²⁷ Der falder fire elever fra undervejs, og det er ikke angivet, fra hvilken gruppe de falder fra.

3.5.1 Forskningen på området

Forskningen relateret til temaet bevidsthed om egen læring er kendetegnet ved en række generelle fællestræk. For det første er halvdelen af studierne amerikanske, mens tre studier er europæiske. De europæiske studier er fra henholdsvis Italien (Mason & Scrivani, 2004), Cypern (Panaoura, 2012) og Tyskland (Stoeger & Ziegler, 2010). Derudover er der et nordisk studie fra Sverige (Balan, 2012), som lever op til kortlægningens inklusionskriterier for nordisk litteratur.

For det andet er alle studierne baseret på eksperimentelle forskningsdesign. Ud af de otte studier er fire baseret på et randomiseret, kontrolleret forsøg, og de resterende fire studier er baseret på et kvasi-eksperimentelt design. Studierne er derfor karakteriseret ved at være metodisk solide i forhold til at måle effekter af deres indsatser.

Et tredje fællestræk er, at studierne er kendetegnet ved primært at være målrettet elever på mellemtrinnet (10-12-årsalderen). Ud af de otte inkluderede studier er der dog to studier, hvor indsatsen er målrettet elever i gymnasiet (Clarke et al., 2004; Balan, 2012), og et hvor indsatsen er målrettet elever i udskolingen (Nguyen et al., 2006).

Et sidste fællestræk er, at alle studierne har fokus på elever i normalområdet. Der er dog i to studier differentieret mellem elever med fagligt forskelligt udgangspunkt i afrapporteringen af studierne effekter.

3.5.2 Indsatser, metoder, praksis og redskaber

I forskningen er der identificeret en række forskellige indsatser, som alle har til formål at styrke elevers tiltro til egne matematiske evner ved at tydeliggøre, hvad eleverne kan og ikke kan og dermed gøre dem bevidste om deres egen læring. Indsatserne dækker derfor over forskellige pædagogiske tilgange og undervisningsformer, hvor fokus er på, at formen af undervisningen er medvirkende til at skabe øget bevidsthed for eleverne om deres eget faglige niveau, progression og læring. Indsatserne i studierne kan overordnet grupperes inden for to kategorier.

1. Kategori omfatter fem studier, hvori indsatserne omhandler betydningen af selvevaluering og selvrefleksion, og som særligt har fokus på at gøre evaluering til en fast og systematisk del af elevernes opgaveløsning i matematik (Linnenbrink, 2005; Stoeger & Ziegler, 2010; Mason & Scrivani 2004; Panaoura, 2012; Clarke et al., 2004).
2. Kategori omfatter tre studier, hvor betydningen af feedback til eleverne undersøges (Balan, 2012; Nguyen, 2006; Ramdass, 2009).

Studierne i **den første kategori** er kendetegnet ved, at indsatserne har et specifikt fokus på **elevers selvevaluering som en fast del af opgaveløsningen i matematikundervisningen** (Linnenbrink, 2005; Stoeger & Ziegler, 2010; Mason & Scrivani 2004; Panaoura, 2012; Clarke et al., 2004).

Indsatserne i den første kategori er kendetegnede ved især to indsatstyper, der er gennemgående på tværs af de fem studier. Disse to indsatstyper indebærer indsatser, hvor eleverne opstiller forventninger til sig selv, eller hvor eleverne gennem metakognitive strategier²⁸ (som typisk består af trinbaserede strategier til problemløsning) evaluerer sig selv. Eleverne har på den måde mulighed for konstant at kunne følge egen progression og derigennem blive bevidste om eget udviklingspotentiale.

Den første indsatstype, hvor eleverne opstiller forventninger til sig selv, indebærer, at eleverne enten opstiller læringsmål eller dag-til-dag-forventninger, som de vurderer sig selv i forhold til. I studiet af Linnenbrink (2005) anvendes to forskellige pædagogiske tilgange over for eleverne i matematikundervisningen i forhold til at opstille læringsmål for eleverne. Forskellen på de to

²⁸ At anvende metakognitive strategier betyder at gøre eleverne mere opmærksomme på, hvad de gør, når de skal løse matematiske problemstillinger, og hvorfor problemstillingerne skal løses på den måde, samt hvad de skal gøre, når de kommer i vanskeligheder med at løse den matematiske problemstilling.

tilgange er, at lærerne i den ene fokuserer på elevernes progression og løbende tilegnelse af matematiske færdigheder, hvor lærerne i den anden fokuserer på elevernes præstationer og demonstration af deres *mathematical literacy*. I den første pædagogiske tilgang skal eleverne opstille læringsmål med fokus på deres egen læreproces, og på hvordan de selv kan forbedre deres matematiske færdigheder. I den anden pædagogiske tilgang skal eleverne opstille læringsmål med fokus på at opnå bestemte faglige resultater. Begge tilgange har til formål at gøre elevernes faglige udvikling synlig for eleverne. Eleverne bliver på den måde bevidste om deres eget individuelle faglige niveau i matematik og den faglige fremgang, der er sket i matematikundervisningen. Elevernes præstationer og fremskridt synliggøres derudover ved en planche, der hænger i klasseværelset, hvor eleverne kan se hinandens indbyrdes rangering og faglige præstationer. På den måde arbejder eleverne med egen læring, både gennem de individuelle læringsmål og ved at kunne se sig selv i relation til de øvrige elevers matematiske formåen. I studiet af Støeger & Ziegler (2010) skal eleverne selv vurdere deres egne evner i forhold til hjemmeopgaver. Det foregår på den måde, at eleverne skal læse hjemmeopgaverne igennem og vurdere, hvor mange opgaver de forventer at kunne løse korrekt. Når eleverne har lavet deres hjemmeopgaver, bliver de rettet af læreren, og eleverne skal derefter sammenligne deres forventning med deres faktiske præstation. Eleverne bliver på den måde bevidste om, hvordan de har klaret sig, hvor de har deres styrker og svagheder, samt hvordan de har udviklet sig fagligt. Samtidig giver det eleverne et billede af, hvor god overensstemmelse der er mellem deres vurdering af egne matematiske evner og deres faktiske formåen.

Den anden indsatsstype om metakognitive strategier indebærer, at eleverne lærer en strategi, som gør dem i stand til at evaluere og vurdere sig selv gennem erkendelse om egen læring. Selvevalueringen er derfor et trin i den metakognitive strategi. En metakognitiv strategi har som udgangspunkt fokus på trin i problemløsningen, men inkluderer et trin baseret på evaluering og vurdering af egne præstationer.

I studiet af Mason & Scrivani (2004) præsenterer læreren en metakognitiv strategi til at løse matematiske problemer for eleverne. Den metakognitive strategi har fokus på, at eleverne skal tage ansvar for egen læring. Strategien består af fem trin, hvor eleverne skal 1) *præsentere problemet for sig selv* (fx ved at tegne problemet eller lave en liste over de relevante informationer, der er givet i problemformuleringen), 2) *vælge en løsningsstrategi* (gøre sig bevidst om, hvilken måde eleven vil løse problemet på), 3) *foretage udregninger* (løse den matematiske problemstilling), 4) *fortolke resultaterne* (oversætte resultatet til den kontekst, opgaven er skrevet indenfor) og 5) *evaluere resultatet* (vurdere om løsningen giver mening). For hvert af de fem trin er der tilknyttet et spørgsmål, som eleverne skal svare på. Spørgsmålene for hvert trin ser således ud:

- Hvad ved jeg i forvejen? (Præsentation af problemet for sig selv)
- Hvad vil jeg gerne finde ud af? (Valg af problemløsningsstrategi)
- Bruger jeg de strategier, jeg har lært? (Udregne problemstillingen)
- Skal jeg prøve en anden strategi? (Fortolke resultatet)
- Giver mit løsnings svar mening? (Evaluere resultatet).

I starten af indsatsen bliver eleverne støttet i denne proces, men langsomt, som eleverne lærer at mestre denne strategi, overlades det til eleverne selv at gennemgå de fem trin. På den måde kan eleverne selv benytte sig af strategien i andre matematiske sammenhænge, hvor der ikke er støtte fra læreren. Eleverne skal efter problemløsningen diskutere og evaluere deres resultater i fællesskab i klassen.

I studiet af Panaoura (2012) bliver eleverne også præsenteret for en metakognitiv strategi til at løse matematiske problemer. Strategien har fokus på at få eleverne til at reflektere over deres løsninger og måder at håndtere problemer på samt at gøre eleverne mere strategisk bevidste i deres problemløsning. Centralt i indsatsen er det, at eleverne skal foretage selvevaluering og selvrefleksion. Konkret får eleverne en hjemmeside stillet til rådighed, der guider dem igennem de forskellige trin i problemløsningen. De kan på hjemmesiden få hints og forslag til, hvordan de

kan komme videre med en opgave, og de får samtidig løbende feedback på deres forkerte svar i problemløsningen, som også indeholder forklaringer på, hvordan opgaven kan løses. Når eleverne har løst en opgave, får de stillet fire spørgsmål af en tegneseriefigur i programmet, som de skal svare på, og som har til hensigt at få eleverne til at reflektere over, hvordan de løser matematikopgaverne, samt hvorvidt det er den rigtige tilgang til løsning af opgaven. Spørgsmålene ser ud som følger:

- Hvordan fandt du frem til den løsning?
- Er du sikker på, at det er den bedste løsning?
- Har du en bedre løsning?
- Åh, denne opgave var svær, synes jeg. Hvad synes du?

Begge studier har fokus på at give eleverne et redskab til at kunne løse problemløsningsopgaver gennem elevernes egne vurderinger og refleksioner. Ved at bede eleverne om selv at vurdere og reflektere over deres problemløsning gøres eleverne mere bevidste om, hvad de gør, hvad de kan gøre bedre, og hvor de har deres styrker og svagheder.

Studiet af Clarke et al. (2004) skiller sig ud fra de fire førnævnte studier, idet indsatsen består af et problembaseret pensum, der adresserer matematiske begreber og færdigheder samt matematisk problemløsning i en sammenhæng. Problemerne præsenteres eksempelvis i en virkelig kontekst, således at problemstillingen sættes i en sammenhæng, eleverne genkender fra hverdagen. Undervisningen har fokus på at aktivere eleverne i undervisningen og dermed ændre lærerens rolle til at være vejledende for at give plads til flere elevinteraktioner. Et element i indsatsen er, at eleverne skal evalueres på flere måder. Eleverne skal blandt andet lave selvevalueringer og elevportefolier for derigennem at gøre eleverne bevidste om deres eget faglige niveau og fremdrift. Hvordan eleverne skal foretage selvevalueringen, fremgår ikke af studiet og kan derfor ikke placeres under en bestemt type selvevaluering.

Studierne i **den anden kategori** er kendetegnet ved, at indsatserne har et specifikt fokus på **umiddelbar feedback til elever** (Balan, 2012; Nguyen, 2006; Ramdass, 2009). I to af disse studier beskrives indsatser, hvor eleverne får en umiddelbar feedback på deres opgaveløsning (Nguyen et al., 2006; Ramdass, 2009).

I studiet af Nguyen et al. (2006) skal eleverne løse online matematiske opgavesæt på computer, som handler om brøkgregning og decimaler. Eleverne har mulighed for gentagne gange at gennemføre øvelserne, da tallene i de online opgavesæt ændrer sig, efter hver gang eleven har løst opgavesættet. Eleverne kan undervejs i opgaveløsningen få hints til, hvordan de skal løse en opgave. De kan samtidig gå tilbage i opgaverne for at få hjælp til de næstkommende opgaver. Eleverne får en tilpasset og umiddelbar feedback på deres opgaveløsning undervejs og får angivet deres svarprocent (pct. rigtige svar), som giver dem en indikation af, hvordan de klarer sig. Den umiddelbare feedback dannes i programmet på baggrund af en registrering af de fejl, som eleverne gentagne gange har under udregningerne. Har eleverne foretaget samme fejl flere gange i træk, relateres feedbacken således til dette. Den feedback, der gives til eleverne af computeren, er et skærmbillede, hvor der står, hvordan eleverne skal løse opgaven rigtigt uden at give det rigtige svar. Eleven får derved hjælp til at ændre sine fejl med det samme ved at få løsningsmetoden forklaret uden at få det rigtige svar og kan på den måde undgå at lave de samme fejl i den videre opgaveløsning. Til forskel fra studiet af Panaoura (2012) er der i studiet af Nguyen et al. (2006) blot feedback og ikke selvevaluering og selvrefleksion. Indsatsen i studiet af Nguyen et al. (2006) er målrettet matematikundervisning i udskoling.

I studiet af Ramdass (2009) får eleverne også umiddelbar feedback undervejs i deres problemløsning, men her får de ikke deres feedback af et computerprogram. Derimod får de feedbacken af den forsker, der gennemfører indsatsen en-til-en med eleverne. I indsatsen er eleverne opdelt i grupper, der får to forskellige former for instruktioner i problemløsning. De to typer af instruktioner er henholdsvis *instruktion i strategisk træning* og *instruktion i selvrefleksion*. Instruktionen

vedrørende strategisk træning består i, at forskeren giver eleverne et par strategier, de kan bruge, når de skal løse forskellige brøkrekningsopgaver. De bliver samtidig trænet i at løse opgaverne ved en trin-for-trin-strategi, og opgaverne er derfor delt op i punkter, som eleven skal igennem. Instruktionen vedrørende selvrefleksion består i, at forskeren giver eleverne umiddelbar feedback undervejs i opgaveløsningen ved at markere de steder, hvor eleverne laver fejl, og bede eleverne om at løse problemet igen ved at spørge dem om, hvordan de kan løse det på en anden måde. Eleverne bliver derfor undervejs bedt om at reflektere over deres egne fejl. Indsatsen er målrettet matematikundervisning på mellemtrinnet.

Indsætterne i de to studier har begge fokus på, at eleverne skal have umiddelbar feedback på deres opgaveløsning. Det vil sige, at eleverne i begge studier får feedback løbende under deres opgaveløsning, og dermed ikke skal vente til en lærer har rettet deres opgaver.

Studiet af Balan (2012) skiller sig en smule ud fra de to andre studier ved at omhandle feedback som en integreret del af undervisningen, og som derfor ikke kun relaterer sig til umiddelbar feedback på den enkelte opgave. Fokus er i stedet på, at eleverne gennem en formativ evalueringsskema skal arbejde systematisk med et evalueringsskema i undervisningen. Evalueringsskemaet danner grundlag for dialog og feedback mellem lærer og elev såvel som mellem eleverne. Feedbacken er struktureret på en fast måde. Først sætter læreren eleverne sammen i par. Eleverne får derefter tid til individuelt at løse deres opgave(r), hvorefter de bytter opgaver med deres makker. Elevernes skal ud fra evalueringsskemaet vurdere hinandens opgaver og derefter give en mundtlig tilbagemelding. Efter elev-til-elev-feedback er givet, samles eleverne i klassen, hvor læreren fremdrager forskellige løsninger, som eleverne skal vurdere og diskutere i fællesskab. Efter plenumdiskussionen får eleverne individuel feedback fra læreren. Gennem denne feedback-procedure med udgangspunkt i evalueringsskemaet bliver det tydeligt for eleverne, hvordan de klarer sig og udvikler sig fagligt, ligesom de får mulighed for at se deres klassekammeraters løsning af matematikopgaverne og på den måde også kan spejle sig i, hvordan de andre griber problemstillingerne an. Indsatsen er beskrevet i boksen nedenfor:

Boks 3-7: Den formative evalueringspraksis

Den formative evalueringspraksis sigter mod at gøre eleverne mere bevidste om deres egen læringsproces med henblik på at forbedre deres kompetencer i matematik og deres tiltro til egne matematiske evner.

Den formative evalueringspraksis består derfor af følgende fem dimensioner:

- 1) Eksplicitering af mål og kriterier ved systematisk anvendelse af et evalueringsskema (*scoring rubric*).
- 2) Synliggørelse af gymnasieelevernes læring gennem anvendelse af problemløsningsopgaver og gruppearbejde, hvor eleverne skal ekspliciterer deres tankegang skriftligt i deres svar og mundtligt over for hinanden.
- 3) Tilbage melding til gymnasieeleverne fra lærerne i form af nuanceret information om deres præstation samt forslag til, hvordan den enkelte elev kan nå næste læringsmål.
- 4) Aktivering af gymnasieeleverne som en ressource gennem aktiviteter med elev-til-elev-evaluering (*peer-assessment*) og elev-til-elev-feedback (*peer-feedback*).
- 5) Indførelse af en undervisningsform, hvor gensidig kommunikation om evaluering har en fast struktur.

Evalueringsskemaet fra punkt 1 anvendes som udgangspunkt for både tilbage meldingen til eleverne, for elev-til-elev-evalueringen og for den gensidige kommunikation mellem lærer og elever samt eleverne imellem. Studiet viser, at den formative evalueringspraksis har en positiv effekt på elevernes problemløsningsfærdigheder og tiltro til egne matematiske evner.

Læs mere: Balan (2012): Assessment for learning: A case study in mathematics education.

3.5.3 Resultater og effekter

Samlet set tegner de otte studier et billede af, at indsatser og strategier, der gør eleverne bevidste om deres egen læring gennem selvevaluering og feedback, har en positiv effekt på elevens tiltro til egne matematiske evner. Der dokumenteres positive effekter i alle otte studier af både høj og medium forskningsmæssig kvalitet. Et enkelt studie viser ingen effekt for den del, der handler om umiddelbar feedback til eleverne (Ramdass, 2009).

I tabellen nedenfor fremgår de virkningsfulde mekanismer, som indeværende kortlægning har identificeret under teamet om bevidsthed om egen læring. Resultaterne sammenholdes endvidere med de enkelte studiers evidensvægt.

Tabel 3-11: Virkningsfulde mekanismer under temaet om bevidsthed om egen læring

Indsætsernes fokus	Studie	Kontekst	Positiv effekt	Negativ effekt	Evidensvægt
Selvevaluering	Stoeger & Ziegler (2010)	Grundskole	Elevernes tiltro til egne matematiske evner	-	Høj
	Linnenbrink (2005)	Grundskole	Elevernes tiltro til egne matematiske evner* Elevernes almene matematiske kompetencer	Elevernes tiltro til egne matematiske evner**	Medium
	Mason & Scrivani (2004)	Grundskole	Elevernes tiltro til egne matematiske evner Elevernes almene matematiske kompetencer og problemløsning	-	Medium
	Panaoura (2012)	Grundskole	Elevernes tiltro til egne matematiske evner	-	Medium
	Clarke et al. (2004)	Gymnasiet	Elevernes tiltro til egne matematiske evner	-	Medium
Feedback til elever	Balan (2012)	Gymnasiet	Elevernes tiltro til egne matematiske evner	-	Høj
	Nguyen et al. (2006)	Grundskole	Drengenes tiltro til egne matematiske evner	Pigernes tiltro til egne matematiske evner (negativ effekt)	Høj
	Ramdass (2009)	Grundskole	Elevernes tiltro til egne matematiske evner***	Elevernes tiltro til egne matematiske evner****	Medium

*: Positiv effekt ved den del af indsatsen, der har fokus på faglig progression og løbende tilegnelse af matematiske færdigheder.

** : Ingen effekt ved den del af indsatsen, der har fokus på faglige præstationer og demonstration heraf.

***: Positiv effekt ved den del af indsatsen, der *ikke* giver umiddelbar feedback til eleverne.

****: Ingen effekt ved den del af indsatsen, der giver umiddelbar feedback til eleverne.

Som det fremgår af ovenstående tabel, er der primært fundet positive effekter af indsatser baseret på elevers selvevaluering i studierne om elevers tiltro til egne matematiske evner. Der skal dog tages forbehold for, at de fleste studier har medium evidensvægt og derfor er behæftet med nogen usikkerhed i forhold til effekterne. For studierne med indsatser, der indeholder feedback til elever, viser der sig et mindre entydigt billede i forhold til effekter af indsatserne. For de to studier med høj evidensvægt findes der positive effekter, men for det ene gælder de positive effekter kun for drengene. Det sidste studie viser ingen effekt af feedback til eleverne. Det skal dog ses i lyset af, at studiet har medium evidensvægt.

Det fremgår også af ovenstående tabel, at der er en positiv effekt på elevernes matematiske færdigheder i samtlige studier, der undersøger effekten på elevernes matematiske færdigheder. To af studierne finder konkret en positiv effekt på elevernes problemløsningsfærdigheder, hvor de resterende fire studier udelukkende finder en positiv effekt på elevernes almene matematikkompetencer.

I studiet af Linnenbrink (2005) fremhæves det, at der kun er en positiv effekt af at opstille læringsmål for elevernes progression og tilegnelse af faglige færdigheder og ikke af at opstille læ-

ringsmål for elevernes faglige præstationer og demonstration heraf. I studiet af Mason & Scrivani (2004) fremhæves det, at elever, der præsenteres for metakognitive strategier i et innovativt læringsmiljø, klarer sig fagligt set bedre, end elever der ikke præsenteres for dette, samt at de har større tro på egne matematiske evner. I studiet af Panaoura (2012) fremgår det, som i Mason & Scrivani (2004), at eleverne både forbedrer deres matematiske færdigheder og deres tiltro til egne matematiske evner i højere grad, end de elever der ikke modtager indsatsen. De metakognitive strategier løfter altså eleverne fagligt og styrker deres tiltro til egne matematiske evner. I studiet af Stoeger & Ziegler (2010) fremhæves det, at eleverne, der arbejder ud fra selvevaluering, ikke kun øger deres tiltro til egne matematiske evner, men også øger deres villighed til at yde en ekstra indsats i matematik. Især har det en positiv effekt for de elever, der præsterer under gennemsnittet, men ikke er blandt de svageste elever.

I forhold til indsatser med fokus på feedback til eleverne er der stor forskel i effekterne af de forskellige indsatser. I studiet af Nguyen et al. (2006) finder de en positiv effekt for drengene på deres tiltro til egne matematiske evner, når der kontrolleres for køn. Drengene i indsatsgruppen vurderer i højere grad end drengene i sammenligningsgruppen, at de er enige i følgende udsagn: "*Jeg er sikker på mig selv, når jeg løser matematiske opgaver*", "*Jeg kan klare mig godt i matematik*" og "*Jeg tror, jeg kan løse sværere matematiske problemer*". For pigerne er der ingen forskel i forhold til førstnævnte udsagn, men i forhold til de to sidstnævnte udsagn er der en negativ effekt for pigerne i indsatsgruppen, der i lavere grad end pigerne i sammenligningsgruppen er enige i udsagnet.

I studiet af Ramdass (2009) er der ikke forskel mellem drenge og piger. Her fremgår det for begge køn, at der er en positiv betydning af instruktion i strategisk træning på deres tiltro til egne matematiske evner samt i forhold til at mindske deres skævvridning i tiltro til egne matematiske evner. Studiet indikerer samtidig, at skævvridning i tiltro til egne matematiske evner korrelerer negativt med elevernes matematiske færdigheder²⁹, hvilket vil sige, at jo større forskel der er mellem elevens vurdering af egne matematiske evner og elevens faktiske evner, desto lavere præsterer eleven. Studiet indikerer endvidere, at instruktion i selvrefleksion ingen effekt har på elevernes tiltro til egne matematiske evner. Det vil altså sige, at der ikke er opbakning til, at umiddelbar feedback til eleverne har en effekt på elevernes tiltro til egne evner. Indsatsen strækker sig over 60 minutter og er udført af en forsker, og resultaterne er derfor udelukkende på kort sigt.

I studiet af Balan (2012) viser effekten af den formative evalueringspraksis, hvor feedback er en fast del af undervisningen, sig generelt at være positiv for eleverne. Derudover viser indsatsen at have størst effekt på elever, der i udgangspunktet har lav tiltro til egne matematiske evner. Det vil altså sige, at det er elever med lav selvtillid, der får mest ud af at få feedback. Sammenlignes resultaterne i studiet af Balan (2012) med de to andre studier om feedback til elever, viser det sig, at en feedback som en integreret del af undervisningen har en positiv effekt for alle elever, hvor en umiddelbar feedback har mere differentierede effekter på eleverne.

På baggrund af studierne i indeværende kortlægning viser det sig samlet set, at elevens tiltro til egne matematiske evner kan forbedres ved at gøre elevernes læring synlig for dem, så de bliver bevidste om deres egen læreproces og faglige niveau. Fokus på elevernes faglige progression frem for faglige præstationer, systematisk brug af evaluering og metakognitive strategier med selvevaluering er elementer, der går igen på tværs af studierne. Samlet set kan der ikke konkluderes noget i forhold til umiddelbar feedback til elever, men studiet med høj evidensvægt identificerer en tydelig forskel mellem drenges og pigers tiltro til egne evner (Nguyen et al. 2006).

²⁹ Vær opmærksom på, at det ikke er matematiske færdigheder i relation til anvendt matematik, men i forhold til brøkgregning.

4. OPSAMLING OG PERSPEKTIVERING

Dette afsluttende kapitel indeholder en tværgående opsamling på den gennemførte forskningskortlægning og -syntese om *mathematical literacy*. *Mathematical literacy* er en fællesbetegnelse for både at kunne anvende de erhvervede matematiske færdigheder, kundskaber og forståelse i en hverdagskontekst og at kunne benytte sig af hverdagen i matematikken. Derudover også at ville anvende matematikken og have tiltro til egne matematiske evner. Kapitlet opsummerer kortfattet udvalgte resultater og hovedpointer fra de inkluderede studier.

Efterfølgende undersøges det, hvorvidt det er muligt at identificere nogle **tværgående tendenser**, når man sammenholder indsatsernes effekt med en række implementeringsforhold, som indsatserne er gennemført under.

4.1 Virkningsfulde indsatser inden for mathematical literacy

Kortlægningen inden for *mathematical literacy* har haft som formål at indsamle og systematisere forskningsinformeret viden om, hvilke specifikke metoder og indsatser der har en positiv effekt på elevernes anvendelse af deres matematiske kompetencer.

Kortlægningen har identificeret **fem temaer**, som alle indeholder studier, der i større eller mindre omfang viser en positiv effekt på eleveres *mathematical literacy*. Fire af disse temaer repræsenterer hver især forskellige typer af indsatser målrettet den del af *mathematical literacy*, der handler om matematik i anvendelse, mens et enkelt tema omfatter de indsatser, som er målrettet den anden del af forståelsen af *mathematical literacy*, der handler om eleveres tiltro til egne matematiske evner.

Studierne inden for temaet om **systematisk problemløsning** omfatter indsatser, der sætter fokus på, at elever skal anvende en systematisk og delvis skematisk tilgang til løsning af matematiske problemer. Hensigten med indsatserne er, at eleverne skal tilegne sig metakognitive strategier, som gør eleverne i stand til at evaluere og vurdere sig selv. Eleverne lærer, hvordan de ud fra en række fast definerede og forbundne faser/trin kan gribe løsningsprocessen relateret til matematiske problemer an. Strategierne skal ikke forstås som et sæt af generelle regler for, hvordan et givent problem løses, idet strategierne ikke løser problemet for eleverne, men i stedet giver dem redskaberne til at udtænke den gode idé til løsning af problemet. Samlet set kan det på baggrund af kortlægningen konstateres, at indsatserne i vid udstrækning viser sig effektfulde. Indsatserne har i 17 ud af 19 studier en positiv effekt på eleveres matematisk problemløsning, om end mindre entydigt på eleveres matematiske færdigheder. Det betyder, at eleverne bliver i stand til at anvende redskaberne i den systematiske problemløsning, som aktiverer elevernes ideer til løsningen af det matematiske problem.

Det andet tema - **modellering** - beror på, at eleverne skal udvikle og visualisere løsningsmodeller på matematiske problemer *på egen hånd*. Indsatserne illustrerer forskellige måder at understøtte dette på – både i forhold til hvordan eleverne skal konkretisere, visualisere og præsentere løsningsstrategierne, og i forhold til hvilken karakter den omverden (kontekst) har, som den matematiske problemstilling er skrevet ind i. Kortlægningen viser, at indsatserne i vid udstrækning (fem ud af seks studier) har positive effekter på elevernes matematiske problemløsning og delvist på matematiske færdigheder. Effekterne er dog ikke lige så entydigt positive, som det er tilfældet i temaet om systematisk problemløsning.

Kortlægningen viser endvidere, at brug af **konkrete materialer**, som eksempelvis LEGO-klodser, centicubes, træblokke mv., der enten anvendes generelt i matematikundervisningen eller i mere faste undervisningsforløb, i høj grad er effektfulde på eleveres matematiske problemløsning og færdigheder. Alle indsatser, der indeholder brug af konkrete materialer anvendt generelt i matematikundervisningen, har en positiv effekt på eleverne matematiske færdigheder, mens effekten er varierende, når de konkrete materialer anvendes i et konkret matematikforløb.

Anvendelse af konkrete materialer i undervisningen bidrager til at illustrere matematikken for eleverne og at give eleverne praksisorienteret erfaring med matematik. Selve indsatsen, der underbygger brugen af de konkrete materialer, er ikke udpræget velbeskrevet i forskningen, og det er derfor vanskeligt konkret at vurdere, hvorvidt de beskrevne effekter skyldes det konkrete redskab eller den undervisningsform, som lærerne benytter sig af i brugen af redskaberne. Dette opmærksomhedspunkt må også påpeges i forhold til it-understøttet læring, se nedenfor.

Det fjerde tema, der kobler sig til *mathematical literacy* er **it-understøttet læring**. Studierne i temaet belyser, at man ved brug af it-baserede programmer har muligheder for forholdsvis enkelt at individualisere undervisningen således, at den imødekommer den enkelte elevs behov og kan sikre hurtig og umiddelbar feedback til den enkelte elev. Temaet er også at finde som en delmængde af temaet om systematisk problemløsning, men i dette tema er der sat eksplicit fokus på computerprogrammer, der støtter eleverne i løsningen af matematiske problemer. Alle fem studier, som er målrettet læring af systematisk problemløsning gennem computerprogrammer, viser sig effektfulde på elevernes matematiske problemløsning og færdigheder. Der er i mindre grad et klart billede i forhold til effekten af indsatser, der handler om at anvende opgaver, hvor opgavebeskrivelsen og konteksten varierer for samme matematiske problem, og hvor eleverne får et øjeblikkeligt resultat ved hjælp af computerprogrammet.

Syntesens femte og sidste tema omhandler indsatser, der behandler elevernes **bevidsthed om egen læring**. Studierne undersøger, hvordan man via selvevaluering og løbende feedback kan forbedre elevernes tiltro til egne matematiske evner ud fra den antagelse, at det har en positiv betydning for elevernes matematiske færdigheder. Ikke alle studier undersøger dog, hvorvidt dette er tilfældet. Indsatserne har fokus på, at eleverne skal reflektere, vurdere og evaluere deres egne matematiske færdigheder og kompetencer indenfor problemløsning. Hensigten med dette er, at eleverne bliver bevidste om egen læring og læringsprocesser. De fem studier, hvor indsatsen er fokuseret på selvevaluering, viser sig alle at være effektfulde i forhold til elevernes tiltro til egne matematiske evner (*self-efficacy*). De øvrige tre studier, hvor indsatsen er centreret om feedback til eleven, viser et mindre entydigt billede i forhold til effekterne af indsatserne, men indsatserne har i vid udstrækning en positiv effekt på elevens tiltro til egne matematiske evner.

4.2 Implementeringsforhold

I dette afsnit ser vi nærmere på, hvorvidt det er muligt at identificere nogle tendenser på tværs af de 34 studier, som indgår i kortlægningen, når indsatsernes effekt sammenholdes med rammerne for implementeringen. Det undersøges derfor, om der er forhold, som det er særlig væsentlige at tage højde for ved gennemførelsen af indsatserne.

Det skal indledningsvist understreges, at oplysninger om fx indsatsernes omfang, graden af implementering, og graden af uddannelse af underviserne i høj grad varierer fra studie til studie. Dette vanskeliggør en sammenligning på tværs. Dertil kommer, at der er to studier, der ikke indeholder de fornødne informationer (fx om en indsats er implementeret som foreskrevet), hvorfor disse ikke vil være medtaget i overvejelserne.

Det skal endvidere bemærkes, at der er tale om overvejelser, der ikke må forveksles med analyser baseret på statistiske sammenhænge. Optællingen på tværs af studier kan højst antyde, hvorvidt en række faktorer kan have indflydelse på indsatsernes effekt eller ej.

4.2.1 Indsatsernes tidsmæssige omfang

33 af de 34 inkluderede studier i kortlægningen viser en positiv effekt af indsatser rettet mod at styrke elevens *mathematical literacy*. Det er identificeret ét studie, som ingen effekt påviser af indsatsen som helhed, men der er ikke identificeret studier, hvor indsatsen som helhed påviser *negativ* effekt.

Det **tidsmæssige omfang** af indsatserne i studierne varierer meget; fra 60 minutter til op til to skoleår. Indsatserne kan deles op i tre underkategorier, hvoraf der findes 14 *korte* indsatser (mindre end 8 uger), 12 *mellemlange* indsatser (8-24 uger) og 7 *længerevarende* indsatser (mere end 24 uger). Derudover er der to studier, hvor længden på indsatsen ikke er angivet³⁰. De tre kategorier viser, at det er muligt med en forholdsvis kortvarig indsats at styrke elevernes *mathematical literacy*. Det er dog vigtigt at understrege, at der kan være tale om en række faglige begrundelser for indsatser af længere varighed.

Ovenstående optælling leder til den simple konstatering, at tidsomfang ikke nødvendigvis korrelerer med effekt inden for *mathematical literacy*. Dog skal det gentages, at studierne i nærværende kortlægning er forskellige på en lang række parametre (kontekst, deltagere, indsatser og design), hvorfor det ikke har været muligt at sammenligne effekter på tværs af studier.

4.2.2 Graden af implementering

I en del af studierne er det eksplicit angivet eller beskrevet, **i hvilken grad underviserne har fulgt de instruktioner/gennemført de aktiviteter**, der er beskrevet i indsatsen, dvs. om lærerne og øvrigt pædagogisk personale har implementeret indsatserne efter hensigten. Der er her tale om en indikation af *fideliteten*, dvs. graden af loyalitet i forhold til de krav, der stilles til indsatsens implementering.

En gennemgang af studierne på tværs af temaerne viser, at indsatserne med en positiv effekt i vid udstrækning *vurderes af forskerne* til ikke at afvige i betydelig grad fra det 'foreskrevne', og at implementeringen af indsatsen derfor er sket efter hensigten. Studierne inkluderet i denne kortlægning har generel karakter af at have tydelige indsatsbeskrivelser. Indsatsernes indhold og fremgangsmåde er detaljeret i flere studier, ligesom det konkrete matematiske fokus ofte er velbeskrevet og eksemplificeret i de enkelte studier. De tydelige indsatsbeskrivelser er især tilfældet for studierne inden for temaet om systematisk problemløsning, hvor de enkelte lektioners indhold er velbeskrevet (fx Bottge et al., 2004; Jitendra et al., 2007, 2009, 2013 a, b, c; Mason & Scrivani, 2004). Det gælder, både i forhold til hvilke matematiske områder de enkelte lektioner adresserer, og samtidig også hvilke strategier og eventuelle skematiske diagrammer, som eleverne skal præsenteres for.

Derudover er der en række studier, som indeholder mindre velbeskrevne indsatser, og hvor det derfor er vanskeligere at vurdere, hvorvidt underviserne har fulgt instruktionerne for indsatsen. Det gør sig især gældende for studierne, hvor der anvendes konkrete materialer i undervisningen (fx Newman et al., 2012; Brendefur et al., 2013). Flere af disse studier præciserer ikke, hvorledes de konkrete materialer skal anvendes i undervisningen, ligesom det i flere af studierne ikke er beskrevet tydeligt, hvordan de konkrete materialer er anvendt i de gennemførte indsatser. Der er i studierne i højere grad lagt op til, at brugen af de konkrete materialer stilles til rådighed som inspiration for lærerne, der selv tilrettelægger, hvordan brugen af materialerne skal gribes an i undervisningen.

4.2.3 Kompetenceudvikling af undervisere

Afslutningsvis skal fremhæves **omfanget af den introduktion/instruktion, undervisning m.v.**, som lærere og øvrigt pædagogisk personale får inden igangsættelse af undervisningsforløbene³¹.

Her viser der sig ligeledes at være forholdsvis stor variation blandt indsatserne i studierne. Underviserens kompetenceudvikling varierer fra to timer til tre dage. I langt de fleste indsatser er der dog typisk tale om, hvad der i timer svarer til en til to dages instruktion, hvor der er fokus på, at underviserne præsenteres for indsatsmaterialet, herunder det matematiske fokus i forlø-

³⁰ Antallet af studier summerer til 36, til trods for at der blot er 34 studier inkluderet i syntesen, da det systematiske review af Carbonneau et al. (2013) indgår i alle tre kategorier.

³¹ I få studier er det forskerne selv, der står for undervisningen/indsatsen.

bet, og undervisningsmetoden. Det har ikke været muligt at undersøge karakteren af disse instruktioner for eventuelt at kunne identificere nogle kvalitative forskelle.

Langt de fleste kompetenceudviklingsforløb finder sted indledningsvist (fx Brendefur et al., 2011; Jitendra et al., 2011; Jitendra et al., 2013 a, c). Der er kun tale om enkelte indsats, hvor kompetenceudviklingen er fordelt over hele indsatsperioden og dermed fungerer som en form for processtøtte i implementeringen af indsatsen (fx Harskamp & Suhre, 2007).

4.3 Afrunding

Denne forskningskortlægning og -syntese om *mathematical literacy* har med udgangspunkt i nordisk og international forskning bidraget til at belyse, hvilke specifikke indsats og metoder der kan styrke elevernes kompetencer inden for matematik i anvendelse samt deres tiltro til egne matematiske evner.

Samlet set viser kortlægningen, at der er en række effektfulde indsats med fokus på at lære eleverne tilgange til løsning af matematiske problemer, som styrker elevernes matematiske problemløsning og generelle matematiske færdigheder. Ligeledes viser kortlægningen, at der også er en række effektfulde indsats, som styrker elevernes tiltro til egne matematiske evner ved at øge elevernes bevidsthed om egen læring.

En del af indsatserne i denne kortlægning vil skulle oversættes og gentænkes til en dansk skolekontekst. De generelt velbeskrevne indsats i de fleste studier (jf. bilag 1) giver mulighed for at få et grundigt indblik i, hvordan de forskellige indsats er udført af underviseren (eller forskeren i enkelte studier) og kan deraf umiddelbart synes relativt enkle at replicere. Men den tekniske karakter af indsatsbeskrivelserne betyder også, at studierne ikke altid rammesætter de didaktiske overvejelser eller den pædagogisk tilgang i indsatserne, hvilket medfører, at indsatserne ikke nødvendigvis er så enkle at overføre, som det umiddelbart kan synes ud fra detaljeringsgraden af det konkrete indhold i indsatsen. Det kræver samtidig, at lærerne og det øvrige pædagogiske personale bringer egne pædagogiske og didaktiske kompetencer (samt viden om eleverne) i spil.

I de tilfælde, hvor man er godt i gang, vil kortlægningen kunne skærpe blikket på detaljen og give inspiration til at gå nye veje. For andre vil den kunne give inspiration til at komme godt i gang. I alle tilfælde vil implementeringen af kortlægningens viden i praksis blive styrket af en fælles refleksion i klasse- og fagteamet. Som afslutning henvises til den praksispublikation, der udgives som opfølgning på denne forskningskortlægning.

REFERENCELISTE

1. Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. (2013). A Meta-Analysis of the Efficacy of Teaching Mathematics with Concrete Manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 380-400.
2. Lindenskov, L., & Jankvist, U. T. (2013). Matematik. I: Egelund, N. (Red.), PISA 2012 – Danske unge i en international sammenligning (s. 16-85). København: KORA.
3. Reikerås, E., Løge, I. K., & Knivsberg A.-M. (2012). The Mathematical Competencies of Toddlers Expressed in Their Play and Daily Life Activities in Norwegian Kindergartens. *International Journal of Early Childhood*, 44(1), 91-114.
4. Undervisningsministeriet (2009). Fælles Mål. Undervisningsministeriet.
5. Woodward, J., Beckmann, S., Driscoll, M., Franke, M., Herzig, P., Jitendra, A., Koedinger, K. R., & Ogbuehi, P. (2012). Improving mathematical problem solving in grades 4 through 8: A practice guide (NCEE 2012-4055). Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education.

Referenceliste på inkluderede studier

* = Studier med lav evidensvægt. Disse studier indgår ikke i syntesen.

1. Balan Andreia (2012) Assessment for learning: a case study in mathematics education [Elektronisk resurs]: Malmö högskola, Fakulteten för lärande och samhälle.
2. Björkdahl Ordell, Susanne, Eldholm Gerd (2003) Räkna med textil [Elektronisk resurs].
3. Bottge Brian A; Heinrichs Mary, Mehta Zara Dee; Rueda Enrique, Hung Ya-Hui, Danneker Jeanne (2004) Teaching Mathematical Problem Solving to Middle School Students in Math, Technology Education, and Special Education Classrooms. *RMLE Online: Research in Middle Level Education*. 27: 1-17.
4. Brendefur Jonathan, Strother Sam, Thiede Keith, Lane Cristianne, Surges-Prokop Mary Jo; (2013) A Professional Development Program to Improve Math Skills among Preschool Children in Head Start. *Early Childhood Education Journal*. 41: 187-195.
5. Bryant Diane Pedrotty; Bryant Brian R; Roberts Greg, Vaughn Sharon, Pfannenstiel Kathleen Hughes; Porterfield Jennifer, Gersten Russell (2011) Early Numeracy Intervention Program for First-Grade Students With Mathematics Difficulties. *Exceptional Children*. 78: 7-23.
6. Carbonneau Kira J; Marley Scott C; Selig James P; (2013) A Meta-Analysis of the Efficacy of Teaching Mathematics with Concrete Manipulatives. *Journal of Educational Psychology*. 105: 380-400.
7. Clarke David, Breed Margarita, Fraser Sherry (2004) The Consequences of a Problem-Based Mathematics Curriculum. *Mathematics Educator*. 14: 7-16.

8. Clements Douglas H; Julie Sarama (2008) Experimental Evaluation of the Effects of a Research-Based Preschool Mathematics Curriculum. *American Educational Research Journal*.*
9. Dijk I M.A.W. van; (2003) Strategic learning in primary mathematics education: effects of an experimental program in modelling. *Educational Research and Evaluation*. 9(2): 161-187.
10. Fuchs Lynn S; Fuchs Douglas, Prentice Karin, Hamlett Carol L; Finelli Robin, Courey Susan J; (2004) Enhancing Mathematical Problem Solving Among Third-Grade Students With Schema-Based Instruction. *Journal of Educational Psychology*. 96: 635-647.
11. Fuchs L S; Fuchs D, Finelli R, Courey S J; Hamlett C L; Sones E M; Hope S K; (2006) Teaching third graders about real-life mathematical problem solving: A randomized controlled study. *Elementary School Journal*. 106: 293-311.
12. Gamo Sylvie, Sander Emmanuel, Richard Jean-Francois (2010) Transfer of strategy use by semantic recoding in arithmetic problem solving. *Learning and Instruction*. 20: 400-410.
13. Griffin Cynthia C; Jitendra Asha K; (2009) Word Problem-Solving Instruction in Inclusive Third-Grade Mathematics Classrooms. *Journal of Educational Research*. 102: 187-201.
14. Harskamp E, Suhre C (2007) Schoenfeld's Problem Solving Theory in a Student Controlled Learning Environment. *Computers & Education*. 49: 822-839.
15. Ramdass Darshanand H; (2009) Improving Fifth Grade Students' Mathematics Self-Efficacy Calibration and Performance through Self-Regulation Training.
16. Hobbs Robert Maurice; (2012) Improving Problem-Solving Techniques for Students in Low-Performing Schools.*
17. Jitendra Asha K; Griffin Cynthia C; Haria Priti, Leh Jayne, Adams Aimee, Kaduvettoor Anju (2007) A Comparison of Single and Multiple Strategy Instruction on Third-Grade Students' Mathematical Problem Solving. *Journal of Educational Psychology*. 99: 115-127.
18. Jitendra Asha K; Star Jon R; Starosta Kristin, Leh Jayne M; Sood Sheetal, Caskie Grace, Hughes Cheyenne L; Mack Toshi R; (2009) Improving Seventh Grade Students' Learning of Ratio and Proportion: The Role of Schema-Based Instruction. *Contemporary Educational Psychology*. 34: 250-264.
19. Jitendra Asha K; Star Jon R; Rodriguez Michael, Lindell Mary, Someki Fumio (2011) Improving Students' Proportional Thinking Using Schema-Based Instruction. *Learning and Instruction*. 21: 731-745.
20. Jitendra Asha K; Star Jon R; (2012) An exploratory study contrasting high- and low-achieving students' percent word problem solving. *Learning and Individual Differences*. 22: 151-158.
21. Jitendra Asha K; Dupuis Danielle N; Rodriguez Michael C; Zaslofsky Anne F; Slater Susan, Cozine-Corroy Kelly, Church Chris (2013a) A randomized controlled trial of the impact of schema-based instruction on mathematical outcomes for third-grade students with mathematics difficulties. *The Elementary School Journal*. 114: 252-276.

22. Jitendra Asha K; Star Jon R; Dupuis Danielle N; Rodriguez Michael C; (2013b) Effectiveness of Schema-Based Instruction for Improving Seventh-Grade Students' Proportional Reasoning: A Randomized Experiment. *Journal of Research on Educational Effectiveness*. 6: 114-136.
23. Jitendra Asha K; Rodriguez Michael, Kanive Rebecca, Huang Ju-Ping, Church Chris, Corroy Kelly A; Zaslofsky Anne (2013c) Impact of Small-Group Tutoring Interventions on the Mathematical Problem Solving and Achievement of Third-Grade Students With Mathematics Difficulties. *Learning Disability Quarterly*. 36: 21-35.
24. Krawec Jennifer, Huang Jia, Montague Marjorie, Kressler Benikia, de Alba , Amanda Melia (2013) The Effects of Cognitive Strategy Instruction on Knowledge of Math Problem-Solving Processes of Middle School Students With Learning Disabilities. *Learning Disability Quarterly*. 36: 80-92.
25. Kroesbergen E H; Van Luit , J E H; Maas C J. M; (2004) Effectiveness of explicit and constructivist mathematics instruction for low-achieving students in the Netherlands. *Elementary School Journal*. 104: 233-251.
26. Kyriacou Chris, Goulding Maria (2006) A systematic review of strategies to raise pupils' motivational effort in Key Stage 4 mathematics. : University of London. Institute of Education. Social Science Research Unit. Evidence for Policy and Practice Information and Co-ordinating Centre.*
27. Leh Jayne M; Jitendra Asha K; (2013) Effects of Computer-Mediated versus Teacher-Mediated Instruction on the Mathematical Word Problem-Solving Performance of Third-Grade Students with Mathematical Difficulties. *Learning Disability Quarterly*. 36: 68-79.*
28. Lindh Joergen, Holgersson Thomas (2007) Does lego training stimulate pupils' ability to solve logical problems? *Computers & Education*. 49: 1097-1111.
29. Linnenbrink Elizabeth A; (2005) The Dilemma of Performance-Approach Goals: The Use of Multiple Goal Contexts to Promote Students' Motivation and Learning. *Journal of Educational Psychology*. 97: 197-213.
30. Maccini Paula, Mulcahy Candace A; Wilson Michael G; (2007) A Follow-Up of Mathematics Interventions for Secondary Students with Learning Disabilities: Blackwell Publishing. 350 Main Street, Malden, MA 02148.*
31. Mason Lucia, Scrivani Luisa (2004) Enhancing Students' Mathematical Beliefs: An Intervention Study. *Learning and Instruction*. 14: 153-176.
32. Newman Denis, Finney Pamela B; Bell Steve, Turner Herb, Jaciw Andrew P; Zacamy Jenna L; Gould Laura Feagans; (2012) Evaluation of the Effectiveness of the Alabama Math, Science, and Technology Initiative (AMSTI). Final Report. NCEE 2012-4008: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, P.O. Box 1398, Jessup, MD 20794-1398.
33. Nguyen Diem M; Hsieh Yi-Chuan, Allen Donald G; (2006) The Impact of Web-Based Assessment and Practice on Students' Mathematics Learning Attitudes. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*. 25: 251-279.

34. Panaoura Areti (2012) Improving problem solving ability in mathematics by using a mathematical model: A computerized approach. *Computers in Human Behavior*. 28: 2291-2297.
35. Ridlon Candice L; (2009) Learning Mathematics via a Problem-Centered Approach: A Two-Year Study. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal*. 11: 188-225.
36. Rittle-Johnson Bethany, Star Jon R; Durkin Kelley (2012) Developing Procedural Flexibility: Are Novices Prepared to Learn from Comparing Procedures?. *British Journal of Educational Psychology*. 82: 436-455.
37. Stoeger Heidrun, Ziegler Albert (2010) Do Pupils with Differing Cognitive Abilities Benefit Similarly from a Self-Regulated Learning Training Program?. *Gifted Education International*. 26: 110-123.
38. The Preschool Curriculum Evaluation Research Consortium; (2008) Effects of Preschool Curriculum Programs on School Readiness. Report from the Preschool Curriculum Evaluation Research Initiative. NCER.
39. Fede Jessica L; (2010) The Effects of GO Solve Word Problems Math Intervention on Applied Problem Solving Skills of Low Performing Fifth Grade Students.
40. Topping K J; Miller D, Murray P, Henderson S, Fortuna C, Conlin N (2011) Outcomes in a randomised controlled trial of mathematics tutoring. *Educational Research*. 53: 51-63.*
41. Voyer Dominic (2011) Performance in Mathematical Problem Solving as a Function of Comprehension and Arithmetic Skills. *International Journal of Science and Mathematics Education*. 9: 1073-1092.*