Lærerens hæfte

Matematik A htx.

Råd og vink til arbejdet med nye opgavetyper i Matematik A, htx

November 2019

## Indholdsfortegnelse

# Forord til Lærerens hæfte

Dette hæfte er en lærervejledning til arbejdet med de nye opgavetyper i matematik A på htx. Hæftet indeholder korte forklaringer af opgavetyperne og skal bidrage til forståelsen af det nye opgaveformat. Der er udsendt to vejledende prøvesæt på A-niveau, som ligger på Materialeplatformen https://materialeplatform.emu.dk/eksamensopgaver/gym/htx/index.html. Tilsammen afspejler sættene de ændringer i prøveform og fagligt indhold, der fremgår af 2017 læreplanerne. I dette hæfte henvises til konkrete opgaver fra de to vejledende sæt [VPA1] og [VPA2].

Med venlig hilsen

Laila Madsen, fagkonsulent
laila.madsen@stukuvm.dk

# Hvorfor en ny eksamensform?

I 2016 nedsatte undervisningsministeren en matematikkommission, der havde som opgave at komme med forslag til en revision af faget. Matematikkommissionens rapport blev offentliggjort i januar 2017, og blandt de forslag kommissionen kom med var en modernisering af prøveformerne, herunder indførelse  af opgaver i mindstekrav, samt et øget fokus på vedligeholdelse af basale færdigheder. I matematik A på htx førte dette til:

- indførelse af en delprøve 1 uden andre hjælpemidler end den tilsvarende formelsamling (kan hentes på UVMs hjemmeside: https://www.uvm.dk/gymnasiale-uddannelser/fag-og-laereplaner/laereplaner-2017/htx-laereplaner-2017 jeg vil gøre opmærksom på her, at forfatterne der står anført ikke er korrekt. Det er Marit Hvalsøe Schou og Bente Pihl)
- en tilpasning til det nye kernestof
- yderligere inddragelse af IT ved behandling af et større talmateriale
- indførelse af mindstekravsopgaver.

# Opgavesættets indhold

Den nye skriftlige prøveform består af to delprøver, der begge udleveres på papir ved prøvens begyndelse. Efter højst en time afleveres besvarelsen til delprøve 1 på papir, herunder eventuelle bilag. Derefter må eleven benytte alle hjælpemidler, og på dette tidspunkt kan delprøve 2 hentes elektronisk i Netprøver.dk.

Med 2017 reformen er der sket justeringer i kernestoffet. Det drejer sig om:

- Indførelse af diskret matematik, herunder og rekursive følger, svarende til indholdet i forberedelsesmaterialet fra 2016.
- Indførelse af dataanalyse i form af beskrivende statistik og grafisk repræsentation af data. Læreplan og vejledning giver en detaljeret beskrivelse af deskriptorer og repræsentationsformer.
- Endvidere er vektorfunktioner ikke længere en del af kernestoffet.

Det ene nye emne, diskret matematik, er eksemplificeret i VPA2 1a (en rekursiv følge) og i 7c ved inddragelse af Newtons metode.

Det andet nye emne, statistik, er berørt i VPA2 4. Opgaven indeholder et større talmateriale i en Excel-fil, som eleverne skal arbejde med. Blandt andet skal eleverne selv vælge relevante repræsentationer, der beskriver talmaterialet, så to datasæt kan sammenlignes. Endvidere skal eleverne beregne gennemsnit. I opgaven anføres også ordet ”middeltal”, som er det ord, der benyttes i formelsamlingen. Eleverne skal vide at begge ord kan benyttes.

## Delprøve 1

Indførelsen af en prøve uden CAS er den nok største forandring i eksamensformen. Hermed får man mulighed for at teste elevernes grundlæggende regnefærdigheder, men den benyttes til mere end det. Delprøven omfatter overordnet tre typer af opgaver:

*Færdighedsopgaver*, hvor man viser, at man kan beregne, omskrive, integrere, differentiere, indsætte i formler, løse ligninger etc. Eksempler på denne type er: VPA1 1, 2 og 3c. Bemærk at man i VPA2 3 benytter sig af polære koordinater, hvor vinklen er angivet i grader i forhold til ($x$-)aksen. Formelsamlingens formel (100) kan give indtryk af, at denne vinkel skal angives i radianer, men man kan naturligvis sagtens benytte grader! Går man i negativ omløbsretning bliver vinklen negativ.

*Tegneopgaver*, hvor man skal skitsere plane eller rumlige figurer, grafer, der opfylder givne krav, løsningskurver til differentialligninger etc. Et eksempel på sidstnævnte er VPA2 2.

*Ræsonnementsopgaver*, som fx VPA1 3a og 3b samt VPA2 3b. Denne type opgaver, har også været der tidligere. Nu er de placeret i delprøve 1, fordi CAS ikke er påkrævet.

## Delprøve 2

Som det allerede er kendt på htx, indgår der et forberedelsesmateriale i den skriftlige prøve. I de to vejledende prøvesæt er benyttet tidligere forberedelsesmaterialer: materialet om planintergraler fra 2015 i VPA1 og materialet om matricer fra 2014 i VPA2. Det gælder stadig, at der er 2-4 spørgsmål i prøven, der omhandler forberedelsesmaterialet, og at antallet af spørgsmål skal kunne flytte eleverne 1 karakter.

Opgaverne i delprøve 2 omfatter både opgaver, der udelukkende inddrager ét enkelt emne, som fx ”vektorer i rummet” (VPA1 4), og opgaver som går på tværs af emner. Her kan nævnes VPA1 8, der kombinerer vektorer i rummet med emnet for forberedelsesmaterialet eller VPA2 7, som indeholder spørgsmål om grundlæggende funktioner og diskret matematik (Newtons metode).

De vejledende sæt viser eksempler på både opgaver i ren matematik (VPA1 4), opgaver indlejret i en kontekst (VPA1 5) samt en kombination af disse (VP1 6). I sidstnævnte er første halvdel af opgaven (spørgsmål a og b samt figur 4) en helt traditionel funktionsundersøgelse. Herefter benyttes funktionen til at modellere en klokke, og i den resterende del af opgaven er konteksten nødvendig for at kunne svare på spørgsmålene c og d.

Ligesom på B-niveau skal eleverne kunne behandle et større datamateriale, der er givet som en Excel-fil. Det er allerede beskrevet, hvordan et sådan talmateriale kan indgå i statistikopgaver. En anden mulighed er ved modellering vha. regression. Dette er vist i VPA1 7.

Hvor man i delprøve 1 vil kunne teste om eleverne kan tegne i hånden, kan man i delprøve 2 finde opgaver, der lægger op til graftegning ved IT-anvendelse. Dette kan også omfatte, at eleverne skal angive særlige punkter på eller egenskaber ved grafen som fx i VPA2 7b, hvor løsninger skal markeres på en graf.

Bemærk!
At en opgavetype eller et fagligt emne *ikke* berøres i et af de to vejledende prøvesæt, betyder *ikke*, at den/det ikke længere er relevant eller kan forekomme på et senere tidspunkt. Med to sæt har det ikke været muligt at vise alle opgavetyper og inddrage alle emner. For at vise et bredere udsnit af mulige opgaver har UVM udgivet et hæfte med supplerende opgaver både til delprøve 1 og delprøve 2. Dette kan findes på EMU https://emu.dk/sites/default/files/2019-04/Opgavesamling%20matA%20htx.pdf

# Anvendelse af IT

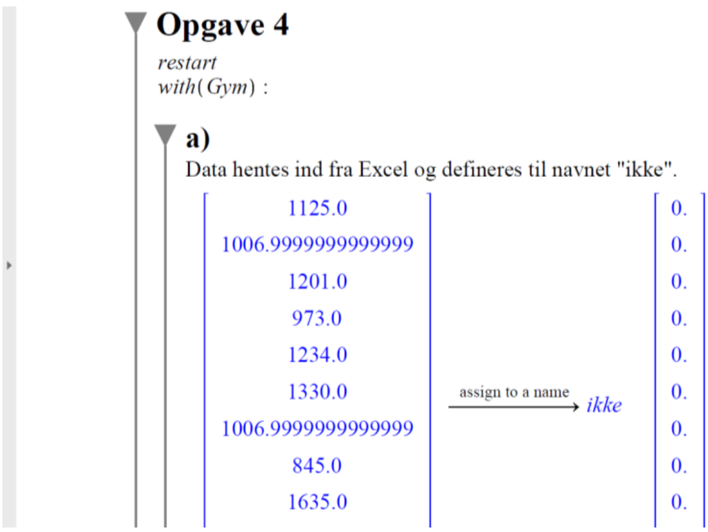
De to vejledende sæt lægger op til følgende typer IT-anvendelse:

A. CAS
B. Regneark
C. Tegne- og geometriprogram

Hver type har forskellige primære anvendelsesområder, og der stilles derfor forskellige krav til elevernes tekniske og faglige kunnen indenfor hver af dem samt til den tilhørende dokumentation.

A. CAS benyttes fortrinsvist til beregninger. Her forventer man altid, at det tilsvarende matematiske udtryk, fx en ligning, opskrives. Når man i VPA1 4b skal bestemme vinklen mellem en linje og en plan, skal det benyttede udtryk for en vinkel mellem vektorer opskrives. Dette gælder ligeledes for de talværdier, der indsættes i formeludtryk. Her skal det tydeligt fremgå, hvilke værdier, der skal indsættes, fx ved at navngive værdierne med de samme symboler, som optræder i udtrykket. Til slut lader man programmet lave beregningen. En undtagelse er sekundære beregninger, dvs. hvor en beregning blot indgår i den beregning, der er spurgt til.

B. Regneark benyttes primært til opgaver i deskriptiv statistik samt til regression. I begge tilfælde kan data være givet i en Excel-fil.
I statistikopgaver kan dokumentationen bestå af et billede af de beregnede deskriptorer, som programmet er fremkommet med illustreret med relevante figurer/diagrammer/grafer og med en passende tekst. Eleverne kan opfordres til at opskrive de matematiske udtryk for fx middeltal og spredning, der er bedt om fx i VPA2 4, eller til at beskrive hvordan man finder median eller aflæser kvartilsæt.
I regressionsopgaver som VPA1 7b kan dokumentationen for de indgående konstanter ligeledes bestå af et billede af den model (funktionsforskrift), programmet når frem til evt. kombineret med en graf, der er indtegnet sammen med datapunkterne.
Flere har efterspurgt en 'elev-besvarelse' af statistikopgaven VPA2. Nedenfor ses derfor en elev-besvarelse af opgaven.



Middelværdien beregnes som det simple gennemsnit af alle tallene vha. kommandoen middel i Maple.

$middel(ikke) = 1117.941634$

Spredningen er kvadratroden af variansen. Variansen er den gennemsnitlige kvadratafvigelse fra middelværdien. Den beregnes vha. kommandoen "spredning" i Maple. Denne kommando angiver spredningen beregnet som en population og ikke en stikprøve. Den beregnede spredning angiver altså spredningen på datasættet og ikke generelt.

$spredning(ikke) = 160.637544551200$

Middelværdien for de ikke-hvide kugler er 1118 mg og spredningen er 161 mg.

**b)**

$$hvid := \begin{bmatrix} 600..800 & 1 \\ 800..1000 & 8 \\ 1000..1200 & 35 \\ 1200..1400 & 16 \\ 1400..1600 & 1 \end{bmatrix}:$$

Det antages altid at observationerne i et interval er jævnt fordelt. Derfor vil middelværdien af observationerne også have samme middelværdi som intervallets middelværdi. Middelværdi og spredning beregnes altså som om der er 1 observation med værdi 700, 8 med værdi 900 osv.

Derefter regnes de begge på samme måde som i sp. a).

$middel(hvid) = 1126.22950819672$

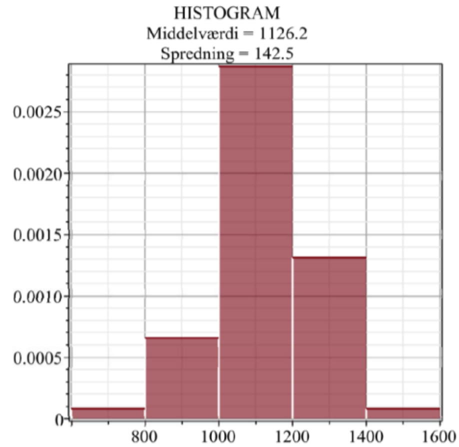
$spredning(hvid) = 142.462694966560$

Middelværdien for de hvide kugler 1116 mg og spredningen er 142 mg.

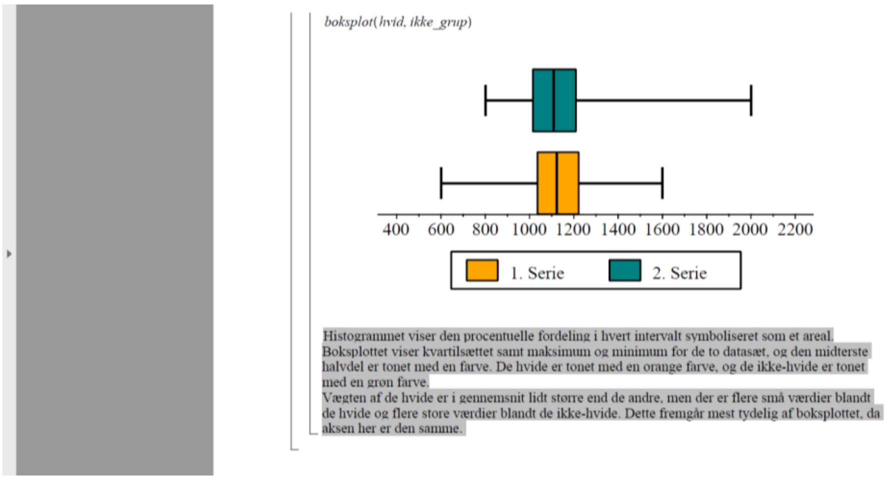
**c)**

De ikke-hvide kugler grupperes med henblik på at tegne histogrammer og boksplot.

$$\begin{bmatrix} 600..800 & 0 \\ 800..1000 & 54 \end{bmatrix}$$




*plotHistogram(ikke_grup)*




C. Geometriprogrammer anvendes ofte til vektoropgaver og analytisk plangeometri. For eleverne kan det være vanskeligt at forstå hvilken dokumentation, der forventes fra brugen af et geometriprogram. Når man fortæller eleverne, at ”de skal vise matematik”, opfattes det at vise matematik ikke nødvendigvis på samme måde af eleverne som det var ment fra lærerside! Ofte benyttes geometriprogrammet bedst til illustrationer, hvor de tilhørende beregninger anføres ved siden af.

Under delprøve 2 og ved den mundtlige eksamen er alle hjælpemidler bortset fra kommunikation med omgivelserne som udgangspunkt tilladt.
Regler vedrørende eksaminandernes brug af internettet for at tilgå tilladte hjælpemidler ved prøverne fremgår af § 6 i ”Bekendtgørelse om visse regler om prøver og eksamen i de gymnasiale uddannelser”.
I vejledningen til denne bekendtgørelse [https://www.uvm.dk/gymnasiale-uddannelser/proever-og-eksamen/regler-og-orienteringer](https://www.uvm.dk/gymnasiale-uddannelser/proever-og-eksamen/regler-og-orienteringer) er der givet eksempler på, hvilke hjælpemidler der må, og hvilke der ikke må, tilgås via internettet.

# Mindstekravsopgaver

Med læreplanen i matematik A fra 2017 blev begrebet *mindstekravsopgaver* indført. Mindstekrav blev introduceret i matematikkommissionens rapport fra 2016 som et middel til at beskrive, hvad der skal til for at bestå. Med mindstekravsopgaverne bliver der peget på en vej, som kan føre til beståelse – hvis mindstekravsopgaverne er lavet korrekt, vil eleven bestå den skriftlige eksamen i matematik A. Der findes dog andre veje, så man kan ikke omvendt sige, at hvis mindstekravsopgaverne *ikke* er lavet, vil eleven *ikke* bestå.

Mindstekravene knytter sig til de mest enkle og lettest forståelige dele af kernestoffet, som en elev forventes at kunne begå sig inden for. Mindstekravene retter sig dermed mod de grundlæggende matematiske færdigheder og kompetencer med og uden matematiske værktøjsprogrammer, som en elev som minimum skal kunne mestre inden for et givet felt, når eleven har gennemført og bestået matematik på det aktuelle niveau.

Mindstekravene kæder viden og begrebsforståelse sammen med færdigheder og kompetencer i relation til simpelt ræsonnement, modellering og problemløsning. Idet kravene til brug af matematiske værktøjsprogrammer bygger på forståelse og fortolkning af såvel input som output både grafisk og symbolsk~~,~~ dækker mindstekrav derfor også over basal brug af de muligheder, som matematiske værktøjsprogrammer tilbyder.
Mindstekrav må ikke forveksles med beherskelse af basale algebraiske færdigheder alene. Beherskelse af basale algebraiske færdigheder uden matematiske værktøjsprogrammer udgør mindre del af mindstekravene.
Til mindstekravene hører, at eleverne kan identificere kernen i et simpelt matematisk problem, og de kan gå til problemet med en rimelig struktureret tankegang, som de er i stand til at redegøre for. Som en del af mindstekravene skal eleven også besidde en vis robusthed, dvs. faglig fortrolighed med og selvstændighed i udvælgelse og anvendelse af metoder i en bestemt type problemløsning med og uden brug af matematiske værktøjsprogrammer.

Opgaver, der afprøver, hvorvidt en elev mestrer mindstekravene, kan trænes og har karakter af typeopgaver, dvs. opgaver, der er forbundet med (en vis grad af) genkendelse, for den elev, der aktivt har deltaget i undervisningen. De kan laves uafhængigt af sættets øvrige opgaver, og de bygger på enkle ræsonnementer, som ofte kan laves i et enkelt trin. Kun i nogle tilfælde vil det kræve at eleven sammensætter flere ræsonnementer indenfor den samme mindstekravsopgave.
Når en opgave omfatter et element af-anvendelsesorientering, så beskrives problemstillingen i en kort og letforståelig tekst. Tilsvarende er symbolbrugen i 'nøgne' matematikopgaver letforståelig. Opgaverne fokuserer dels på beregninger og dels på (en ofte instrumentel) forståelse.

Det er opgavekommissionen, der sammen med fagkonsulenten udpeger sættets mindstekravsopgaver. Disse opgaver er markeret med grønt.

Overordnet fokuserer mindstekravsopgaverne som udgangspunkt på følgende kategorier af færdigheder og kompetencer, som optræder inden et eller flere kernestofemner: Hvor ikke andet er nævnt, kan opgaver stilles i såvel 1. som 2. delprøve. Bemærk at listen ikke er udtømmende.

**Begreber og symboler:**
- Kende begrebsbetegnelser (ord og symboler) og deres betydning
- Indføre symbolske betegnelser
- Forbinde forskellige repræsentationsformer fx symbol og figur.

Eksempler:
Kende begrebsbetegnelser som centrum $(a,b)$ og radius $r$ i cirkel $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ , stamfunktion $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, rekursiv følge $y_n$ og middeltal $\overline{x}$

**Beregninger og manipulationer:**
- Foretage beregninger med tal (addition, subtraktion, multiplikation og division)
- Benytte kvadratsætninger, potensregneregler og logaritmeregneregler anført i formelsamlingen

– Gange ind i parentes og sætte udenfor parentes.

**Formler og funktioner:**
– Indsætte konkrete værdier i formler og forskrifter, beregne resultatet og kunne tilskrive dette resultat en betydning
– Aflæse indgående størrelser/symboler, der forekommer i formler og forskrifter, og tilskrive disse betydning. Denne betydning kan være såvel matematisk som i en omverdenskontekst.

Eksempler
Beregne *f*(4), når $f(x) = x^2 - 3x - 2$, bestemme kurvelængden for f i intervallet [0; 3].
Bestemme skalarproduktet mellem to vektorer.
Argumentere for at to vektorer står vinkelret på hinanden efter man har beregnet deres skalarprodukt, og dette er 0.
Angive at i cirklen med ligningen $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 3^2$ ligger centrum i (4, -1) og radius er 3.

**Geometri og trigonometri**
– Udføre trekantsberegninger i retvinklede trekanter og i vilkårlige trekanter.
– Foretage enkle argumenter indenfor klassisk geometri

Eksempler
Se maj 2019 opgave 4a)

**Ligningsløsning:**
– Afgøre om et anført resultat (værdi, udtryk, funktion) er en løsning til en ligning
– Algebraisk løsning af første- og andengradsligninger (1. delprøve)
– Generel ligningsløsning herunder grafisk og numerisk løsning (kun 2. delprøve).

Eksempler:
Indsætte et koordinatsæt i en cirkel og afgøre om punktet ligger indenfor, på eller udenfor cirklen.
Indsætte en funktion i en differentialligning og afgøre om den er en løsning.

**Operationer på funktioner**
– Differentiere polynomier og den naturlige eksponentialfunktion (1. delprøve)
– Generel differentiation af funktion (kun 2. delprøve)
– Bestemme stamfunktioner og areal for polynomier.

Eksempler
Bestemme linjeelement svarende til en differentialligning.
Bestemme stamfunktionen for $f(x) = 3x^2 - 4$der går igennem punktet (1, 1).
Beregne arealet under grafen for funktionen $f(x) = 3x^2 - 4$ i intervallet [0; 2].

**Grafer og figurer:**
– Skitsere grafer for nulte-, første-, og andengradsfunktioner
– Skitsere løsningskurve for differentialligning ud fra linjeelementer

- Skitser grafer for funktioner ud fra angivne krav/egenskaber
- Tegne grafer for funktioner, herunder hensigtsmæssigt valg af grafvindue (2. delprøve)
- Aflæse på givne grafer
- Skitsere plane figurer.

**Tabeller:**
- Aflæse data fra tabel
- Opskrive (importere) data i tabel
- Indtegne data fra tabel.

**Black box-kommandoer i matematiske værktøjsprogram (2. delprøve):**
- Anvende regression til bestemmelse af funktionsforskrift (matematisk modellering)
- Anvende indbyggede statistiske undersøgelser af data.

Eksempler
Anvende lineær, eksponentiel og potensregression.
Bestemme middelværdi og spredning for et datamateriale

# Mundtlige prøve

Ved den mundtlige prøve er der sket to større ændringer:

- Eleverne skal på forhånd kende de enkelte spørgsmål. Eleverne kan enten løbende gøres bekendt med de mundtlige spørgsmål i undervisningen eller samlet mod slutningen af forløbet.
- Der indgår nu et ukendt bilag, som skal perspektivere spørgsmålet gennem fx billeder, figurer eller en kort overskuelig tekst. Bilag kan også være konkrete materialer. Bilaget indgår i den faglige samtale i sidste del af eksaminationen.

De spørgsmål, der indgår ved den mundtlige prøve, omfatter hele kernestoffet samt det supplerende stof, der er arbejdet med. Emnet, som behandles i forberedelsesmaterialet, indgår på lige fod med supplerende stof, og der skal derfor stilles spørgsmål i dette emne.
En undtagelse er emnet dataanalyse, som ikke behøver at indgå ved den mundtlige prøve.
Antallet af kendte spørgsmål er ca. 25 - 30.

# Bedømmelse

Som noget nyt er det blevet skrevet ind i læreplanen, hvordan faget skal bedømmes ved prøver, hvor det indgår i fagligt samspil med andre fag. Her skal der lægges vægt på eksaminandens evne til at:

- demonstrere viden om fagets identitet og metoder
- behandle problemstillinger i samspil med andre fag
- anvende matematisk modellering i fagligt samspil.

Derimod er ikke sket væsentlige ændringer i bedømmelseskriterierne for hverken den skriftlige eller mundtlige prøve. For en god ordens skyld er her nævnt, hvad læreplanen siger om bedømmelsen.
Ved den **skriftlige prøve** lægges der vægt på eksaminandens evne til at:

- anvende matematiske teorier og metoder til problembehandling og argumentation
- opstille og behandle matematiske modeller samt vurdere resultater
- fremstille og strukturere overskuelig dokumentation
- anvende relevante hjælpemidler, herunder it
- veksle mellem et matematisk begrebs forskellige repræsentationer
- formulere sig i og skifte sikkert mellem det matematiske symbolsprog og det daglige skrevne sprog.

Der gives én karakter ud fra en helhedsvurdering. Hvis eksaminandens præstation lever op til fagets mindstekrav, opnår eksaminanden en karakter svarende til bestået eller højere.

Ved den **mundtlige prøve** lægges der vægt på, at eksaminanden:

- udviser overblik og evne til at generalisere
- udviser fortrolighed med matematisk tankegang og ræsonnement og selvstændigt kan foretage matematiske ræsonnementer
- kan redegøre for opstilling og behandling af matematiske modeller
- kan veksle mellem et matematisk begrebs forskellige repræsentationer
- kan formulere sig i og skifte sikkert mellem det matematiske symbolsprog og det daglige sprog.

Der gives én karakter ud fra en helhedsvurdering af eksaminandens mundtlige præstation.