UNDERVISNINGS
MINISTERIET
STYRELSEN FOR
UNDERVISNING OG KVALITET

Vejledende Enkeltopgaver

Matematik hf B-niveau

Marts 2019

Forord til *Vejledende enkeltopgaver, hf B*, forår 2019

Grundlaget for de skriftlige prøver i matematik B er beskrevet gennem henholdsvis læreplan, undervisningsvejledning, de vejledende og de stillede opgavesæt ved de skriftlige prøver. I læreplanen hedder det om den skriftlige prøve:

"*Den skriftlige prøve*
Grundlaget for den skriftlige prøve er et todelt centralt stillet opgavesæt, som udleveres ved prøven. Prøvens varighed er fire timer.
Det skriftlige opgavesæt består af opgaver stillet inden for kernestoffet. Der indgår i opgavesættet problemstillinger, der tager udgangspunkt i eksaminandernes centrale studieretningens fag.
Prøven er todelt. Ved første delprøve må der ikke benyttes andre hjælpemidler end en centralt udmeldt formelsamling. Efter udløbet af første delprøve afleveres besvarelsen heraf.
Opgaverne til anden delprøve udarbejdes ud fra den forudsætning, at eksaminanden råder over et matematisk værktøjsprogram jf. pkt. 3.3."

Af undervisningsvejledningen fremgår tidsrammen for den skriftlige prøve samt vejledning til behandling af forberedelsesmaterialet:

"Den skriftlige prøve er centralt stillet og består af to delprøver, hvor delprøve 1 varer 1½ time og delprøve 2 varer 2½ time. Desuden udsendes i begyndelsen af skoleåret i september et forberedelsesmateriale, som eleverne selvstændigt under vejledning skal arbejde med i 6 timer, der afsættes af holdets samlede uddannelsestid. Materialet kan være en matematisk tekst, der uddyber eller perspektiverer et kernestofemne eller introducerer et helt nyt emne. Der kan heri indgå behandling af et større datamateriale. Opgavesættet består i begge delprøver af opgaver stillet inden for kernestoffet samt indhold og metoder fra forberedelsesmaterialet. Materialet vil danne grundlag for 10-15 procent af det samlede pointtal i et opgavesæt ved den skriftlige prøve. Årets forberedelsesmateriale er gældende for den skriftlige eksamen ved de efterfølgende tre prøveterminer, dvs. december (vinter) og maj-juni (sommer) samt august (syge) det efterfølgende kalenderår."

Da forberedelsesmaterialet er unikt fra år til år, indeholder denne opgavesamling ikke eksempler på opgaver fra forberedelsesmaterialerne. Eksempler på forberedelsesmaterialer med tilhørende opgaver kan findes i de vejledende og de stillede opgavesæt.

De faglige mål, kernestof og mindstekrav samt bedømmelseskriterierne ved de afsluttende prøver findes ligeledes beskrevet i læreplanen. Denne udgivelse af vejledende enkeltopgaver kan ikke træde i stedet for læreplan og undervisningsvejledning, men skal alene ses som et supplerende materiale til støtte for undervisningen frem mod de skriftlige prøver. Gennem det skriftlige arbejde skal eleverne opnå fortrolighed den centralt udmeldte formelsamling, som kan hentes via uvm.dk, hvor den ligger sammen med læreplan og undervisningsvejledning. Eleverne skal have adgang til en *'ren' udgave af formelsamlingen under delprøve 1* ved de skriftlige prøver.

Opgavesamlingen er ligesom de vejledende opgavesæt udarbejdet af opgavekommissionen, og opgaverne viser, hvordan både nye og gamle emner kan komme til udtryk i henhold til 2017-læreplanen. Opgavesamlingen udgør *ikke en udtømmende* beskrivelse af de opgavetyper, der kan og vil blive stillet ved de kommende skriftlige prøver, men repræsenterer en række forskelligartede måder, hvorpå et emne kan optræde i opgaver ved den skriftlige prøve. Antallet af opgaver inden for et bestemt emne er *ikke udtryk for en vægtning af pågældende emne*. Opgavesamlingen er heller *ikke et udtryk for forholdet mellem lette og svære opgaver* i et prøvesæt, fx er mindstekravsopgaver ikke markeret, og de er ikke repræsenteret i det omfang, der er krav om i et opgavesæt stillet til den skriftlige prøve. De *vejledende eksempler på mindstekravsopgaver* findes på EMU under HF, Matematik, Prøver og eksamen.

I opgavesamlingen findes en række opgaver med spørgsmål, hvori der indgå en deskriptiv statistisk undersøgelse af residualerne fremkommet ved modellering med lineær regression. Disse opgaver stilles ikke ved de skriftlige prøver ved sommerterminen 2019, men vil kunne indgå i de kommende eksamensterminers prøvesæt. Opgaverne repræsenterer en anvendelse af den deskriptive statistik (hørende til C-niveau) på B-niveaustof.

I undervisningsvejledningen hedder det i øvrigt om *læreplanen og lærebøger*:
"Læreplanen beskriver fagets indhold, arbejdsformer og redskaber. Undervisningsvejledningen folder læreplanens intentioner ud og operationaliserer sammen med de skriftlige eksamensopgavesæt læreplanens beskrivelse af kernestoffet.

Lærebogen derimod er de aktuelle forfatteres fortolkning af læreplanens formuleringer. Det er derfor helt centralt, at man som lærer orienterer sig i forskellige lærebøger, diskuterer disses forskellige udlægninger af læreplanens indhold med kolleger og på den baggrund skaber et solidt grundlag for implementering af læreplanens krav."

Formulering af eksamensopgaverne

Af undervisningsvejledningens afsnit 4.2 fremgår retningslinjerne for den skriftlige prøve på B-niveau:

"Ved delprøve 1 er eneste tilladte hjælpemiddel den centralt udmeldte formelsamling (ren, dvs. uden tilføjelser) til det aktuelle matematikniveau. Ved delprøve 2 må eksaminanden benytte alle hjælpemidler (bortset fra kommunikation med omverdenen), og opgaverne til denne del af prøven vil i forskelligt omfang kræve, at eksaminanden behersker et matematisk værktøjsprogram, der lever op til beskrivelsen i læreplanens afsnit 3.3.

Eksaminanderne får adgang til begge delprøver ved prøvens start, men må først tage yderligere hjælpemidler frem, når tiden til delprøve 1 er udløbet, og alle eksaminander har afleveret deres besvarelser af delprøve 1.

Der kan i særlige tilfælde i enkelte opgaver forekomme emner og problemstillinger, der ikke direkte er beskrevet i kernestoffet, og i sådanne tilfælde vil grundlaget for besvarelsen klart fremgå af opgaveformuleringen. Det kan fx være tilfældet i forbindelse med opgaver, der omhandler matematisk modellering, hvor der kan optræde funktionsudtryk, som eksaminanderne forventes at kunne håndtere med brug af et matematisk værktøjsprogram med CAS.

Hovedparten af opgaverne i det samlede opgavesæt tager udgangspunkt i det aktuelle matematikniveau (B-niveau), og på B-niveau med inddragelse af elementer fra stofområdets behandling på C-niveau og med en niveausvarende taksonomi. Fx kan inddragelse af en parameter i en given formel være med til at løfte opgaven fra et regneteknisk niveau til et ræsonnerende niveau. Der kan også forekomme opgaver, der tager direkte udgangspunkt i stof hørende til C-niveau, hvor problemstillingen dog er af en sådan karakter, at det kræver et abstraktionsniveau hørende til B-niveauet.

En del af opgaverne i hver af de to delprøver indeholder tydeligt markerede spørgsmål, der er knyttet til afprøvning af mindstekravene på det aktuelle niveau (jf. afsnit 2.2). De markerede mindstekravsspørgsmål dækker tilsammen ca. 125 % af det pointtal, der i det forelagte opgavesæt kræves for at opnå karakteren 02. Opgaverne involverer forskellige typer af mindstekravskategorier, der tilsammen beskriver det netop acceptable faglige niveau ved den aktuelle prøve i det forelagte opgavesæt.

Brug af formuleringer som 'løs ligningen', 'bestem nulpunkter' eller 'bestem skæringspunkter mellem to grafer' er ikke udtryk for, at der ønskes en bestemt fremgangsmåde. Hvis der er krav om en bestemt løsningsmetode, så vil det fremgå af opgaveformuleringen. I delprøve 1 begrænses svarmulighederne naturligt af, at elevernes eneste hjælpemiddel er en formelsamling. I delprøve 2 skelnes der mellem 'beregning' og 'aflæsning'. I delprøve 2 betyder en formulering som 'Bestem ved beregning…' eller 'Beregn…', at et korrekt svar skal baseres på en algebraisk beregning med et formeludtryk i kombination med en CAS-kommando (fx 'solve'), mens formuleringen 'Bestem ved aflæsning…' eller "Aflæs…" betyder, at et korrekt svar skal baseres på en præcis aflæsning med en dertil indbygget kommando på en grafisk eller en geometrisk repræsentation frembragt i et matematisk værktøjsprogram. I alle andre opgaver vil der være frit valg med hensyn til metode. Det er en del af undervisningen, at eleverne opnår indsigt i styrker og svagheder ved forskellige løsningsstrategier med og uden matematiske værktøjsprogrammer, herunder symbolske, numeriske og grafiske metoder til løsning af ligninger og andre matematiske problemer. Det forventes desuden, at eleverne opnår indsigt i, hvorledes man i opgaver, hvor det er relevant, kan argumentere ved hjælp af den afledede funktion. Formålet er, at eleverne bliver i stand til at vurdere hensigtsmæssigheden ved en given løsningsmetode samt at finde andre veje frem, hvis en bestemt løsningsstrategi slår fejl, fx i de tilfælde, hvor eksaminandens matematiske værktøjsprogram giver et uventet svar.

Det forventes, at eksaminanderne kan opstille modeller ved regression, men det forventes ikke, at de kan begrunde én bestemt model frem for andre.

Ordene 'skitse' og 'tegn' bruges forskelligt. Hvilke detaljer der bør medtages i en 'skitse', afhænger af det konkrete spørgsmål, og det er en del af undervisningen, at eleverne lærer at afkode, hvilke oplysninger der er nødvendige at medtage i den aktuelle situation. Når der bliver bedt om en tegning af en graf, et grafisk forløb eller en modeltegning af en geometrisk situation, så forventes eleverne at medtage de karakteristiske egenskaber ved de objekter, der indgår, herunder hensigtsmæssigt grafvindue og størrelsesforhold.

Når der i en opgave omhandlende geometrisk modellering indgår, at en geometrisk figur på passende vis skal indlægges (indtegnes) i et koordinatsystem, så skal de mål, der er oplyst, anvendes med en sådan præcision at koordinatsættene til relevante punkter i modellen kan aflæses og anvendes i de videre beregninger i relation til modellen.

Hvis der i en opgave stilles krav om, at en graf for en funktion skal tegnes i et bestemt udsnit af koordinatsystemet, så vil det ønskede grafvindue være angivet som et interval for hver af de variable eller på mængdeproduktform $[-10;10]\times[-10;10]$.

Et ekstremumspunkt angives som et punkt i det todimensionale koordinatsystem repræsenteret ved begge koordinater. Førstekoordinaten repræsenterer ekstremumsstedet (maksimums- eller minimumssted), mens andenkoordinaten repræsenterer funktionens ekstremum (maksimum eller minimum). …

Der kan forekomme bilag til opgavesættet i form af regneark med data, som eksaminanderne forventes at kunne importere til videre bearbejdning i deres eget matematiske værktøjsprogram. Der anvendes som standard dansk decimalkomma (fx 1,53 og ikke 1.53), og det er en del af undervisningen, at eleverne lærer at importere data i forskellige formater.

I særlige tilfælde, hvor det danske komma vil give anledning til misforståelser, som fx ved angivelse af koordinater, vil der optræde decimalpunktum. Tilsvarende hvis en autentisk kilde el.lign. benytter decimalpunktum, så vil denne notation ikke blive ændret i gengivelsen i opgavesættet.

De vejledende opgavesæt og de stillede prøvesæt illustrerer dels omfang og opbygning af opgavesæt, dels hvorledes den konkrete udformning af forskellige spørgsmål kan være, herunder hvordan 'spor' hentet fra niveauets kernestof indgår i opgaver i anden delprøve ('spor' kan ikke forekomme i første delprøve). De stillede opgavesæt er dog ikke definerende for det pågældende niveau. Alle prøvesæt (inkl. de vejledende) findes på Materialeplatformen."

Bedømmelse af opgavebesvarelsen

I undervisningsvejledningens afsnit 4.3 beskrives, hvad der lægges vægt på i bedømmelsen:

"Vægtningen af hver af de to delprøver i det todelte centralt stillede opgavesæt svarer til forholdet mellem det samlede pointtal, der kan opnås, i hver af de to delprøver. I ekstreme tilfælde, hvor en eksaminand præsterer højt niveau i den ene delprøve og intet eller meget lavt niveau i den anden delprøve, vurderes, hvorvidt eksaminandens præstation på det foreliggende grundlag lever op til de faglige mål, hvor der indgår både færdigheder og kompetencer dels uden og dels med brug af et matematisk værktøjsprogram.

Vægtningen af de enkelte opgaver i hver af de to delprøver fremgår af opgavesættet. Hver opgave indeholder ét eller flere spørgsmål. Et spørgsmål kan indeholde delspørgsmål."

Et samlet opgavesæt indeholder spørgsmål, der samlet set summerer op til 200 point. Fordelingen af de 200 point mellem de to delprøver er 80 point i delprøve 1 og 120 point i delprøve 2. Af de vejledende opgavesæt fremgår det, at spørgsmålene indgår med forskellig vægt. Det enkelte spørgsmål tildeles enten 5 eller 10 point. Spørgsmål hørende til mindstekravene er fordelt mellem de to delprøver med ca. 30-35 point i delprøve 1 og ca. 45-50 point i delprøve 2.

Af undervisningsvejledningens afsnit 4.3 fremgår det endvidere om mindstekravene:

"En fuld besvarelse af ca. 80 % af samtlige mindstekravsopgaver i et opgavesæt resulterer i karakteren 02. Besvarer eksaminanden yderligere andre opgaver i opgavesættet korrekt, tæller disse besvarelser positivt med frem mod en højere karakter. En eksaminand kan også opnå karakteren 02 ved korrekt besvarelse af tilfældigt udvalgte opgaver, der tilsammen indgår med samme vægt som ca. 80 % af mindstekravsopgaverne i opgavesættet."

Af undervisningsvejledningens afsnit 4.3 fremgår det yderligere om helhedsvurdering:

Bedømmelsen af eksaminandens samlede besvarelse af den skriftlige prøve tager udgangspunkt i en overordnet vurdering af besvarelsen som helhed, hvor der lægges særlig vægt på matematisk korrekthed, men også på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen.

Der lægges særlig vægt på, om eksaminanden:

- mestrer mindstekravene, dvs. de grundlæggende matematiske færdigheder og kompetencer med og uden matematiske værktøjsprogrammer.

- kan håndtere matematisk symbolsprog og operere med matematiske begreber.
- kan anvende matematisk teori og matematiske metoder til modellering og løsning af forelagte problemer.
- kan redegøre for forelagte matematiske modeller og diskutere deres rækkevidde og inddrage relevante usikkerhedsbetragtninger.
- kan præsentere en løsning af et matematisk problem på en klar og overskuelig måde.
- behersker matematiske værktøjsprogrammer til bearbejdning af forelagte matematiske problemer."

Kravene til helhedsindtrykket ved besvarelse af opgaver i delprøve 1 og delprøve 2 er lidt forskellige, idet fx angivelse af mellemregninger giver god mening i besvarelse af opgaver i delprøve 1, men sjældent i besvarelser af opgaver i delprøve 2 med brug af matematiske værktøjsprogrammer, hvor der i stedet er krav om, at eksaminanden dokumenterer sine matematiske overvejelser i brugen af programmets faciliteter. Til gengæld er der behov for forklaringer og henvisninger til diverse grafer og figurer i besvarelser af opgaver ved begge delprøver.

Ved bedømmelsen af helhedsindtrykket af besvarelse af de enkelte opgaver lægges særlig vægt på følgende fire punkter:

- *Redegørelse og dokumentation for metode*
  Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte løsningsstrategi med dokumentation i form af et passende antal mellemregninger eller matematiske forklaringer på metoden, når et matematisk værktøjsprogram anvendes.
- *Figurer, grafer og andre illustrationer*
  Besvarelsen skal indeholde hensigtsmæssig brug af figurer, grafer og andre illustrationer, og der skal være tydelige henvisninger til brug af disse i den forklarende tekst.
- *Notation og layout*
  Besvarelsen skal i overensstemmelse med god matematisk skik opstilles med hensigtsmæssig brug af symbolsprog. Hvis der anvendes matematisk notation, der ikke kan henføres til standardviden, skal der redegøres for betydningen.
- *Formidling og forklaring*
  Besvarelsen af rene matematikopgaver skal indeholde en angivelse af givne oplysninger og korte forklaringer knyttet til den anvendte løsningsstrategi beskrevet med brug af almindelig matematisk notation. Besvarelsen af opgaver, der omhandler matematiske modeller, skal indeholde en kort præsentationen af modellens kontekst, herunder betydning af modellens parametre. De enkelte delspørgsmål skal afsluttes med en præcis konklusion præsenteret i et klart sprog i relation til konteksten.

Specielt med henblik på kategorien formidling og forklaring bemærkes, at ordet "parametre" omfatter både de variable og konstanterne i en model. Formuleringer som "Indfør passende variable…" betyder, at eleven skal vælge variabelbetegnelser og forklare, hvad hver af de variable beskriver i den aktuelle kontekst. Formuleringer som "Gør rede for, hvad tallene fortæller om…" hentyder til, at eleverne skal forklare, hvad modellens konstanter betyder i den aktuelle kontekst. I modelleringsopgaver, hvor eleverne fx bliver bedt om at præsentere et punktplot, residualplot eller en graf, er der ikke krav om en konklusion.

I besvarelsesprocessen kan det være hensigtsmæssigt for nogle elever at kopiere opgaveformuleringer fra den digitale version af opgavesættet ind i besvarelsen, som typisk udfærdiges i et matematisk værktøjsprogram. Det anbefales dog, at eleverne uddrager den nødvendige information for besvarelse af opgaven (og derefter eventuelt sletter udklippet), så det sikres, at opgavebesvarelsen fremstår som en helhed, og elevens tankegang fremgår klart."

Karakterfastsættelsen

Karakteren fastsættes på baggrund af den samlede bedømmelse, som altid en *vurdering af, i hvilket omfang eksaminandens præstation lever op til de relevante faglige mål*, som er angivet i læreplanens afsnit 2.1. Som nævnt oven for vurderes elevens besvarelse med henblik på de nævnte specifikke matematiske kompetencer, og i en karakterfastsættelse inddrages de *kategorier, der er relevante for pågældende prøvesæt*.

Når der *afgives karakterer*, er det vigtigt at kende karakterbekendtgørelsens bestemmelser og beskrivelser af de enkelte karakterer. Karakteren er ét tal og ikke en udtalelse, og karakterskalaen består kun af ganske få tal. Derfor vil den enkelte karakter altid rumme en vis kompleksitet. Som bilag til undervisningsvejledningen findes karakterbeskrivelser, der i skematisk form viser, hvorledes 7-trinsskalaens terminologi kan knyttes sammen med de faglige mål for skriftlig matematik på B-niveau.

Bodil Bruun, fagkonsulent, marts 2019

Vejledende enkeltopgaver hf matematik B marts 2019

Indholdsfortegnelse

Indhold

1. Tal, ligninger og formler

Delprøve 1

1.D1.1

a) Reducér udtrykket $\frac{15 \cdot x^7 \cdot 4 \cdot x^3}{10 \cdot x^2}$.

1.D1.2

a) Reducér udtrykket $a \cdot (2b - a) + a^2 - a \cdot b$.

1.D1.3

a) Reducér udtrykket $(a - b)^2 + a \cdot (2b - a)$.

1.D1.4

a) Reducér udtrykket $p \cdot (p^2 + q) - p \cdot q$.

1.D1.5

a) Reducér udtrykket $(a + b)^2 + 3a \cdot (a - b) - b^2$.

1.D1.6

a) Løs andengradsligningen $x^2 + 4x - 5 = 0$.

1.D1.7

Der er givet andengradsligningen $x^2 - 3x - 10 = 0$.

a) Gør rede for, at diskriminanten *d* er lig med 49.
Løs andengradsligningen.

1.D1.8

Der er givet andengradsligningen

$$2x^2 + x - 1 = 0.$$

a) Bestem diskriminanten.
Løs andengradsligningen.

1.D1.9

Der er givet andengradsligningen

$$5x^2 + b \cdot x + 5 = 0.$$

a) Bestem diskriminanten udtrykt ved *b*.

b) For hvilke værdier af tallet *b* har ligningen netop én løsning?

1.D1.10 Der er givet ligningen

$$a \cdot x^2 + 4x + 2 = 0 \text{, hvor } a \neq 0 .$$

a) Bestem diskriminanten udtrykt ved *a*.

b) Bestem tallet *a*, så andengradsligningen har netop én løsning.

1.D1.11 Nedenstående omskrivninger viser en korrekt start på løsning af ligningen

$$(x-2)^2 = 2 \cdot (x+10) .$$

	Forklaring:
$(x-2)^2 = 2 \cdot (x+10)$	Ligningen er skrevet op
$x^2 - 4x + 4 = 2 \cdot (x+10)$	
$x^2 - 4x + 4 = 2x + 20$	
$x^2 - 4x + 4 - 2x - 20 = 0$	
$x^2 - 6x - 16 = 0$	

a) Forklar linje for linje, hvilke omskrivninger der er foretaget.

b) Løs den fremkomne andengradsligning $x^2 - 6x - 16 = 0$.

1.D1.12 Nedenfor ses en forkert start på løsning af andengradsligningen $(x-4)^2 = 2x + 7$.

$$(x-4)^2 = 2x + 7$$
$$x^2 + 16 = 2x + 7$$
$$\ldots$$

a) Forklar, hvilken fejl der er begået.

b) Løs ligningen $(x-4)^2 = 2x + 7$ korrekt.

1.D1.13 a) Undersøg, om $x = 1$ er løsning til ligningen

$$\ln(x) + x^2 + 5 = 6 .$$

1.D1.14 a) Vis, at $x = 7$ er løsning til ligningen $\sqrt{x+9} = 4$.

1.D1.15 a) Undersøg, om $x = 5$ er løsning til ligningen $\sqrt{x^2 + 15} = 6$.

1.D1.16

a) Løs ved beregning ligningssystemet

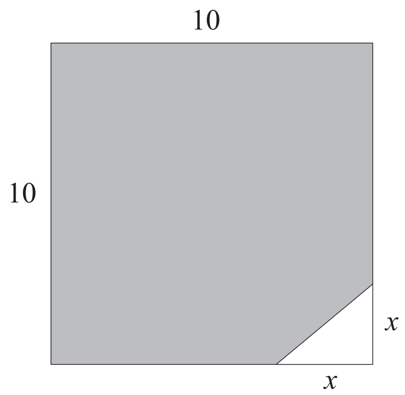
$$x+2y=5$$
$$3x-2y=11$$

1.D1.17

a) Løs ved beregning ligningssystemet

$$y=2x-5$$
$$y=-x+7$$

1.D1.18



Figuren viser et kvadrat med sidelængden 10, hvor der er skåret et hjørne af. Sidelængderne i hjørnet er *x*.

a) Bestem arealet af det grå område for $x=4$.
b) Bestem et udtryk for arealet *A* af det grå område som funktion af *x*.

1.D1.19

Om en funktion $y=b\cdot x^a$ oplyses, at *y* vokser med 20 %, hver gang *x* øges med 15 %.

a) Gør rede for, at tallet *a* kan bestemmes som løsning til ligningen $1{,}20=1{,}15^a$.

1.D1.20

Ved bestemmelse af en mands normalvægt *y*, målt i kg, ud fra hans højde *x*, målt i cm, kan man anvende følgende formel

$$y=0{,}9\cdot(x-100)\,.$$

Denne formel kan med rimelighed anvendes for højder mellem 170 cm og 200 cm.
Det oplyses, at Peter er 10 cm højere end Gert.

a) Hvor meget er Peters normalvægt større end Gerts normalvægt.

2. Funktioner og Differentialregning

Delprøve 1

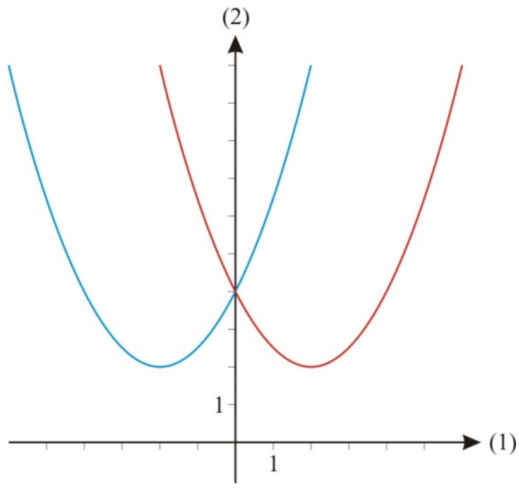
2.D1.1

En parabel har ligningen $y = x^2 - 4x + 3$.

a) Bestem koordinatsættet til parablens toppunkt.

b) Tegn parablen.

2.D1.2



Figuren viser to parabler, som er graf for funktionerne

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + c \quad \text{og} \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + c\,.$$

a) Bestem tallet c ved aflæsning på figuren.

b) Hvilken parabel svarer til funktionen f ? Begrund svaret.

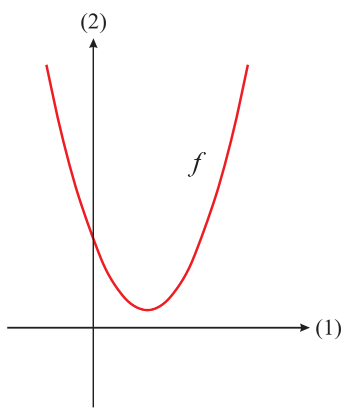
2.D1.3

Figuren viser grafen for andengradspolynomiet

$$f(x) = ax^2 + bx + c\,.$$

Diskriminanten betegnes d.

a) Angiv fortegnet for hvert af tallene a, b, c og d.
Begrund svarene.



2.D1.4 Om et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$ gælder, at grafen for f går gennem punktet (3, −1), og at a er et positivt tal.

a) Skitsér en mulig graf for f, og angiv fortegnet for diskriminanten.

2.D1.5 En parabel er graf for andengradspolynomiet f givet ved

$$f(x) = x^2 - 6x + c.$$

a) Bestem, for hvilken værdi af c parablens toppunkt ligger på førsteaksen.

2.D1.6 Et andengradspolynomium f har forskriften

$$f(x) = -x^2 + 2x + 8.$$

En linje l har ligningen $y = 8$.

a) Bestem førstekoordinaten til skæringspunkterne mellem grafen for f og linjen l.

2.D1.7 Et andengradspolynomium f er bestemt ved

$$f(x) = 2 \cdot (x - 3) \cdot (x + 5).$$

a) Omskriv $f(x)$ til formen $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, og angiv tallene a, b og c.

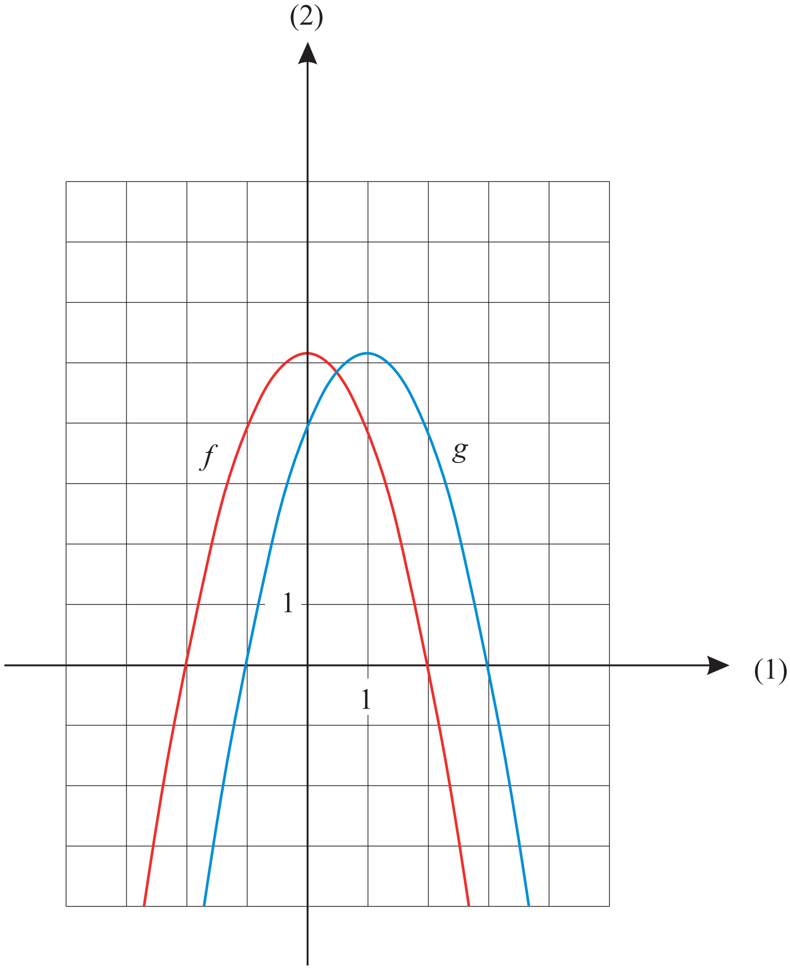
2.D1.8 Et andengradspolynomium f er bestemt ved

$$f(x) = x^2 + 5 \cdot x + 4.$$

a) Løs ligningen $x^2 + 5 \cdot x + 4 = 0$.

b) Omskriv $f(x)$ til formen $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

2.D1.9



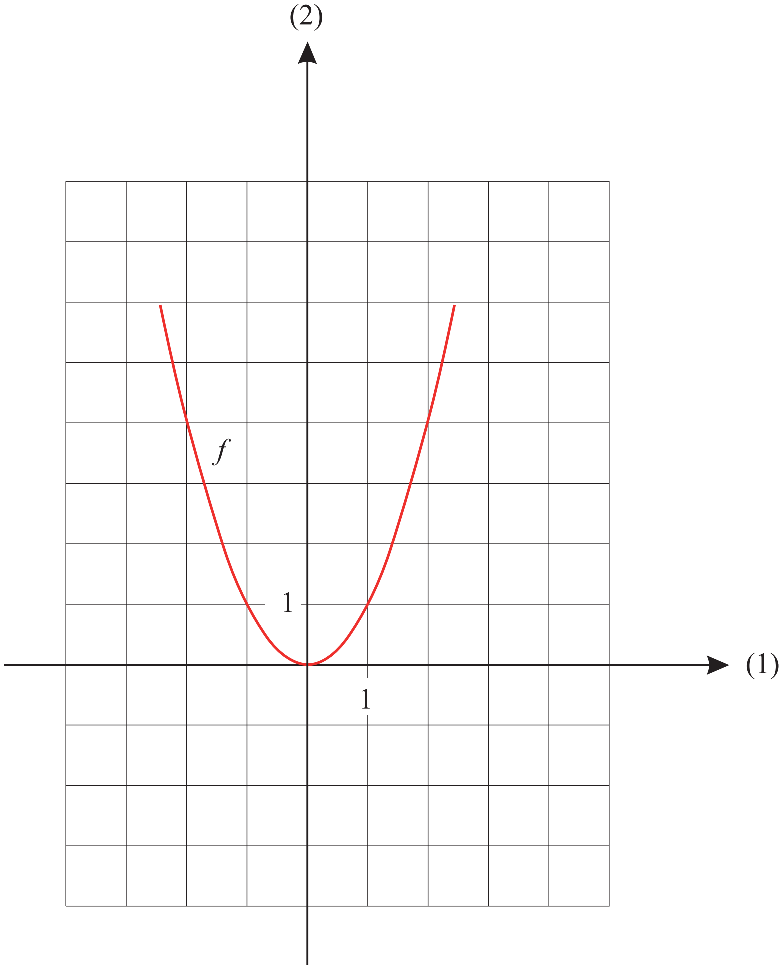
Figuren viser grafen for en funktion f og grafen for en funktion g.
Grafen for g er fremkommet ved at parallelforskyde grafen for f stykket 1 i vandret retning.

a) Afgør, hvilken af de to følgende forskrifter funktionen g er bestemt ved:

$$g(x) = f(x) - 1$$
$$g(x) = f(x-1) \quad .$$

Begrund svaret.

2.D1.10



Figuren viser grafen for andengradspolynomiet $f(x)=x^2$.
Funktionen g er givet ved $g(x)=f(x+2)-4$.

a) Bestem $g(-2)$ og $g(-1)$.

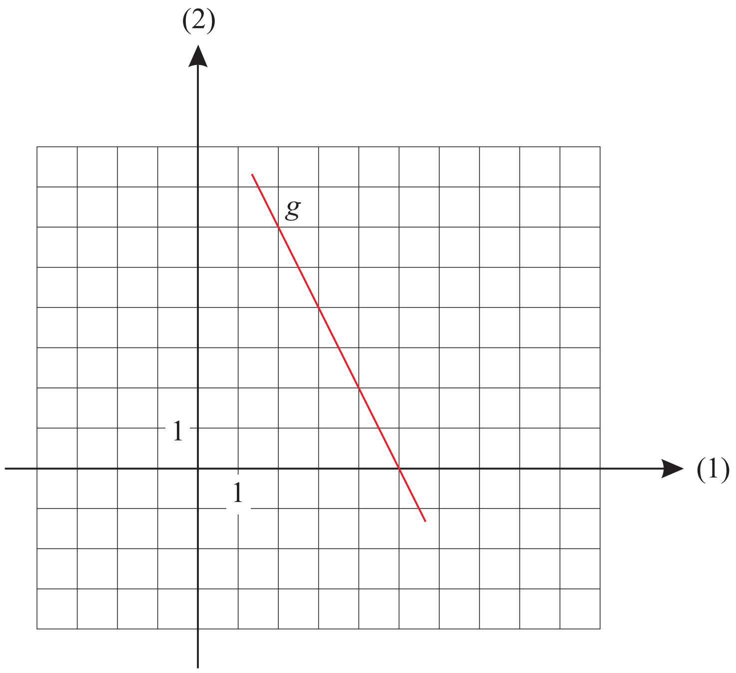
b) Tegn grafen for g i samme koordinatsystem som grafen for f.

2.D1.11

Funktionerne f og g er givet ved $f(x)=\sqrt{x}$ og $g(x)=4x-11$.

a) Bestem $f\big(g(5)\big)$.

2.D1.12



Figuren viser grafen for en lineær funktion g.
Funktionen f har forskriften $f(x) = x^4$.

a) Bestem $g(4)$ og $f(g(4))$.

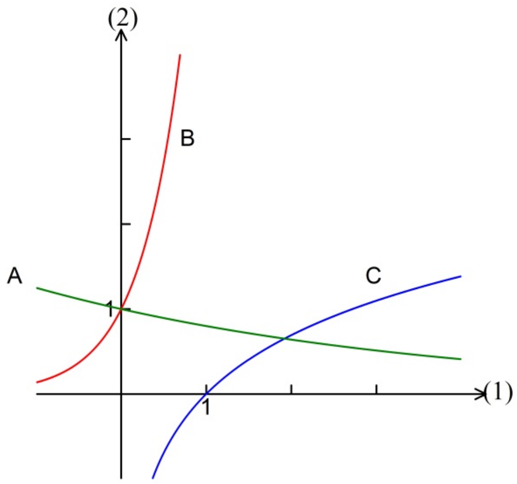
b) Bestem en forskrift for den sammensatte funktion $f(g(x))$.

2.D1.13

På figuren ses en skitse af graferne for funktionerne f, g og h, hvor

$$f(x) = \ln(x)$$
$$g(x) = e^{2x}$$
$$h(x) = 0{,}8^x \quad .$$

a) Gør rede for, hvilken graf der hører til hvilken funktion.



2.D1.14 En stykkevis defineret funktion f har forskriften

$$f(x)=\begin{cases}-2x+11\ , & -1\le x\le 4\\ 0{,}5x+2\,, & 4<x\le 8\end{cases}$$

a) Bestem $f(4)$.
b) Tegn grafen for f.

2.D1.15 En stykkevis lineær funktion f har regneforskrift

$$f(x)=\begin{cases}-2x-1\,, & x\le 1\\ a\cdot x+12\,, & x\ge 1\end{cases}\ .$$

Det oplyses, at grafen for f går gennem punktet $A(6,0)$.

a) Bestem $f(-4)$.
b) Bestem tallet a.
c) Tegn grafen for f.

2.D1.16 På de store oceaner er bølgehøjden proportional med vindhastigheden i 2. potens.

a) Indfør passende betegnelser, og opstil en formel, der beskriver sammenhængen mellem bølgehøjde og vindhastighed.

2.D1.17 Funktionen f er givet ved

$$f(x)=4x^2+2\cdot\sqrt{x}\ ,\ x>0\,.$$

a) Bestem $f'(x)$.

2.D1.18 Funktionen f er givet ved

$$f(x)=4x^2\cdot \mathrm{e}^x\ .$$

a) Bestem $f'(x)$.

2.D1.19 Funktionen f er givet ved

$$f(x)=\ln(4x)\,,\ x>0\,.$$

a) Bestem $f'(x)$.

2.D1.20 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 10 \cdot e^{-0,5x} + 2 .$$

a) Bestem $f'(x)$.

b) Gør rede for, at f er aftagende.

2.D1.21 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 5 \cdot x^2 .$$

a) Bestem $f'(x)$.

2.D1.22 En funktion g er givet ved

$$g(x) = 4 \cdot \ln(x) + 7 , \quad x > 0 .$$

a) Bestem $g'(x)$.

2.D1.23 Om en funktion f med forskrift $f(x) = a \cdot \ln(x)$ oplyses, at $f'(2) = 3$.

a) Bestem tallet a.

2.D1.24 En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^2 + 5x + 3 .$$

a) Bestem $f(1)$ og $f'(1)$.

b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $(1, f(1))$.

2.D1.25 En funktion f er givet ved

$$f(x) = \sqrt{6x - 2} .$$

a) Bestem $f'(x)$.

b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, 2)$.

2.D1.26 En funktion f er givet ved $f(x) = 3x \cdot \ln(x) - x^2 \ , \quad x > 0$.

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P\big(1, f(1)\big)$.

2.D1.27 Funktionen f er givet ved

$$f(x) = \mathrm{e}^x + x^2 - 5 \;.$$

a) Bestem et eksakt udtryk for tallene $f(1)$ og $f'(1)$.

b) Bestem en ligning for tangenten t ved hjælp af resultaterne i a).

2.D1.28 En differentiabel funktion f opfylder følgende:

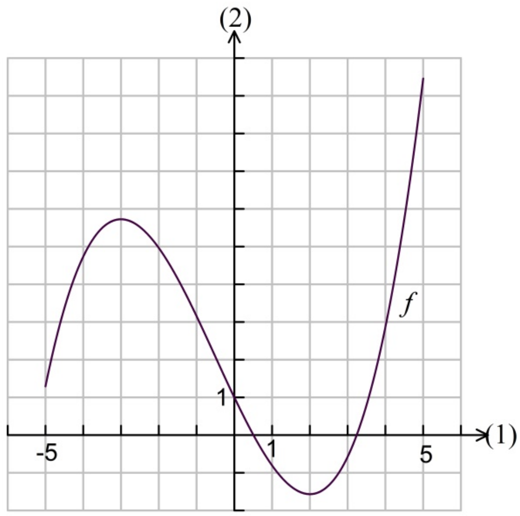
$$f(-1) = 3 \quad \text{og} \quad f(2) = -4 \;.$$

Nulpunkter og fortegn for $f'(x)$ er angivet på tallinjen:

x :		-1		2	
$f'(x)$:	$+$	0	$-$	0	$+$

a) Skitsér grafen for f.
(Der er mange muligheder for, hvordan grafen kan se ud. Der ønskes kun tegnet én mulig graf.)

2.D1.29



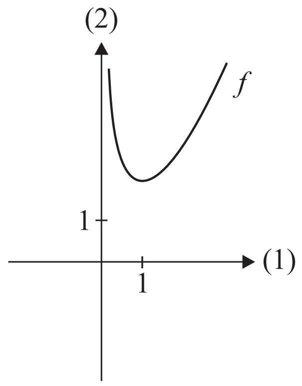
På figuren ses grafen for en funktion f.

Udfyld nedenstående fortegnslinje.

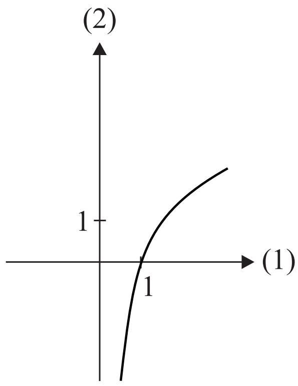
x: -5 5

$f'(x)$:

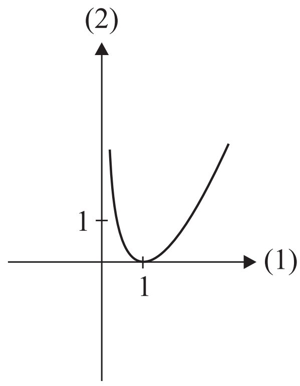
2.D1.30



Ovenstående figur viser grafen for en funktion f.
Det oplyses, at en af nedenstående figurer viser grafen for den afledede funktion (differentialkvotienten) f'.



Figur 1



Figur 2

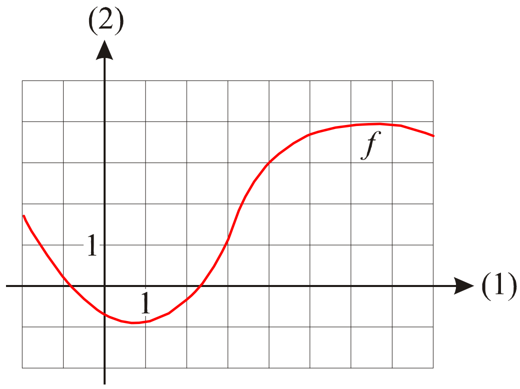
a) Gør rede for, om grafen for f' er vist på figur 1 eller figur 2.

2.D1.31

Der er givet parablen med ligning $y = x^2 - 6x + 10$.

a) Brug differentialregning til at bestemme x-koordinaten til parablens toppunkt.

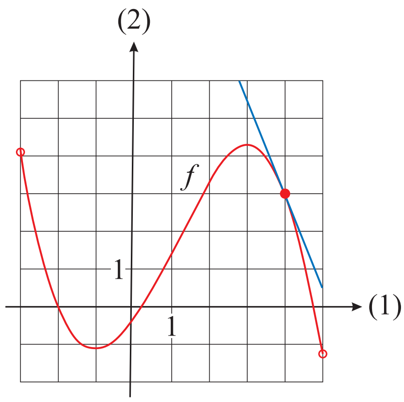
2.D1.32



Figuren viser grafen for en funktion f.

a) Bestem $f'(4)$ ved hjælp af figuren.

2.D1.33



Figuren viser grafen for en differentiabel funktion f.
Desuden er tangenten til denne graf i punktet (4, 3) tegnet.

a) Bestem $f'(4)$ ved hjælp af grafen.

b) Løs ligningen $f'(x) = 0$ ved hjælp af grafen.

2.D1.34

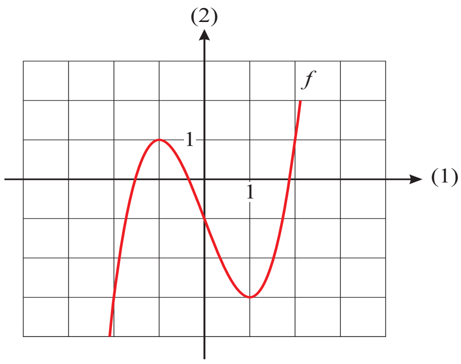
En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 + x - 2 .$$

a) Bestem $f'(x)$.

b) Gør ved hjælp af $f'(x)$ rede for, at f er voksende.

2.D1.35



Figuren viser grafen for en funktion f.

a) Løs ved hjælp af grafen ligningen $f'(x)=0$.
For hvilke værdier af x er $f'(x)$ negativ?

Delprøve 2

2.D2.1 Prisen for at lease en bil i ét år hos et bilfirma, kan bestemmes ved følgende funktion

$$f(x)=\begin{cases} 23000 & , \quad 0\le x\le 15000 \\ 1{,}25\cdot x+4250 & , \quad 15000<x \end{cases}$$

hvor $f(x)$ er prisen for at lease bilen i ét år, når der køres x km i den.

a) Tegn grafen for f.

b) Løs ligningen $f(x)=30000$, og forklar, hvad ligningen og dens løsning fortæller.

2.D2.2 En stykkevis defineret funktion er givet ved forskriften

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5x+8, & -1\le x\le 4 \\ \frac{1}{2}\cdot x+2, & 4<x\le 9 \end{cases}.$$

a) Bestem $f(3)$.

b) Tegn grafen for $f(x)$.

c) Løs ved grafisk aflæsning ligningen $f(x)=6$.

2.D2.3 En undersøgelse har vist, at sammenhængen mellem det totale kvælstofindhold i vand og klorofylkoncentrationen i vandet kan beskrives ved

$$\ln(y) = 1{,}574 \cdot \ln(x) - 7{,}948 \ ,$$

hvor x er det totale kvælstofindhold, og y er klorofylkoncentrationen.
Både x og y måles i µg/L.

a) Bestem klorofylkoncentrationen i vandet, når det totale kvælstofindhold er 1000 µg/L.

Sammenhængen mellem x og y kan også skrives på formen $y = b \cdot x^a$.

b) Bestem tallene a og b.

2.D2.4 Tabellen nedenfor viser udviklingen i antallet af internetopkoblede elektroniske apparater, som ikke er smartphones, i perioden 2010 til 2014.

Årstal	2010	2011	2012	2013	2014
Antal apparater (mia.)	1,1	1,3	1,8	2,3	3,2

I en model kan udviklingen beskrives ved en funktion af typen

$$f(x) = b \cdot a^x ,$$

hvor $f(x)$ betegner antallet af apparater (målt i mia.) til tidspunktet x (målt i år efter 2010).

a) Bestem en forskrift for f ved at bruge alle tabellens data.

I modellen kan udviklingen i antallet af smartphones i samme periode beskrives ved

$$g(x) = 0{,}59 \cdot x + 6{,}5 \ ,$$

hvor $g(x)$ betegner antallet af smartphones (målt i mia.) til tidspunktet x (målt i år efter 2010).

b) Benyt modellen til at bestemme det tidspunkt, hvor antallet af internetopkoblede elektroniske apparater, som ikke er smartphones, overstiger antallet af smartphones.

Kilde: MIT Technology Review 2014.

2.D2.5 I et laboratorieforsøg undersøges, hvordan en bakteriekoloni udvikler sig med tiden. Det viser sig, at antallet af bakterier $f(t)$ som funktion af tiden t, målt i timer, kan beskrives ved

$$f(t) = \frac{9560}{1 + 4{,}6 \cdot e^{-0{,}09 \cdot t}} \, .$$

a) Bestem antallet af bakterier efter 25 timer.

b) Tegn grafen for *f*.

c) Hvilken betydning har tallet 9560 for udviklingen i antallet af bakterier ifølge modellen? Begrund svaret.

2.D2.6 Et bestemt køleanlæg til nedfrysning af kød styres således, at udviklingen i kødets temperatur kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = \frac{750}{x^2 + 2x + 25} - 20 \quad , \quad x \geq 0,$$

hvor $f(x)$ er kødets temperatur, målt i °C, x timer efter, at kødet er anbragt i fryserummet.

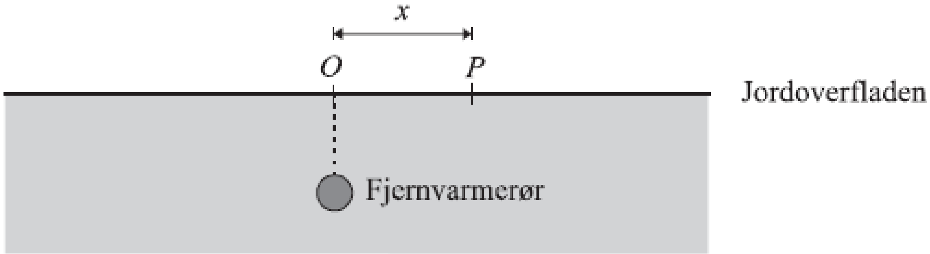
a) Hvilken temperatur har kødet ifølge modellen, når det anbringes i fryserummet?

b) Løs ligningen $f(x) = -7$, og forklar, hvad løsningen fortæller.

c) Tegn grafen for *f*.

d) Findes der en nedre grænse for kødets temperatur? Begrund dit svar.

2.D2.7 Et fjernvarmerør afgiver varme til omgivelserne og bevirker derved en temperaturstigning på jordoverfladen tæt ved røret. Nedenstående figur viser et lodret snit vinkelret på fjernvarmerøret.



En vinterdag kan temperaturen i et punkt *P* på jordoverfladen bestemmes ved

$$f(x) = 3{,}0 \cdot \ln\left(\frac{x^2 + 7{,}8}{x^2 + 1{,}5}\right) - 3{,}5 \quad , \quad x > 0,$$

hvor $f(x)$ er temperaturen i punktet *P*, målt i °C, og x er afstanden fra punktet *O* til punktet *P*, målt i meter.

a) Tegn grafen for f i vinduet $[-1; 7] \times [-4; 2]$.

b) Bestem temperaturen i et punkt på jordoverfladen, som ligger 4 meter fra punktet *O*.

c) I hvilke afstande x fra punktet *O*, er temperaturen $0°\,\text{C}$ eller derover?

2.D2.8 En person bruger medicin mod allergi. I en model for kroppens optagelse af medicinen regner man med, at medicinkoncentrationen i blodet er givet ved

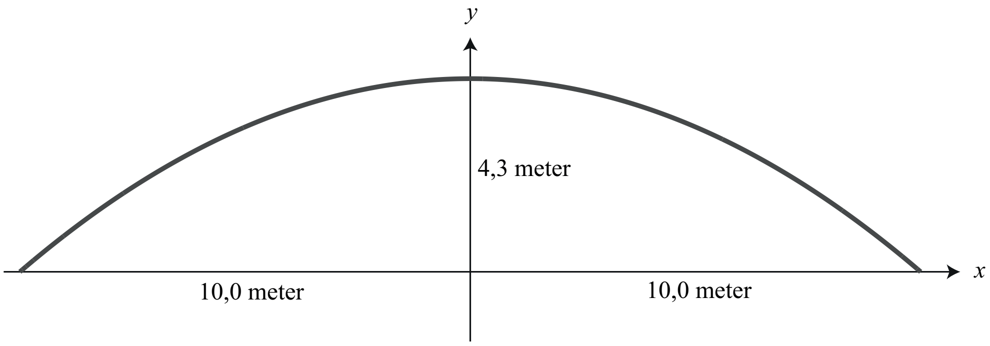
$$f(t) = 12 - 4 \cdot \ln\left(t^2 - 4t + 6\right), \; 1 \le t \le 6 \,,$$

hvor $f(t)$ er medicinkoncentrationen i blodet, målt i milligram pr. liter, t timer efter indtagelsen af medicinen.

a) Tegn grafen for f.

b) Bestem ved grafisk aflæsning det tidsinterval, hvor koncentrationen er over 8,0 milligram pr. liter.

2.D2.9



I en model kan tværsnittet af en tunnel beskrives som en del af en parabel. På figuren er tunnelens tværsnit indtegnet i et koordinatsystem, hvor *x*-aksen følger bunden af tunnelen, og *y*-aksen følger midten af tunnelen. Nogle af målene på tværsnittet fremgår af figuren. Enheden på begge akser i koordinatsystemet er meter.

a) Gør rede for, at parablen i det viste koordinatsystem kan beskrives ved ligningen

$$y = -0,043 \cdot x^2 + 4,3 \,.$$

Man ønsker at bygge en vej i tunnelen, så højden over vejen overalt er mindst 3,2 meter.

b) Bestem den største bredde, som denne vej kan have.

En lastbil er 2,5 meter bred og 4 meter høj.

c) Undersøg om denne lastbil kan køre gennem tunnelen.

2.D2.10 Et lod, der hænger i en fjeder, sættes i lodrette svingninger.
Loddets højde over gulvet kan beskrives ved

$$h(t) = 43,7 \cdot \sin(4,2 \cdot t) + 85,9 \quad ,$$

hvor t er tiden målt i sekunder, og $h(t)$ er højden over gulvet, målt i cm.

a) Tegn grafen for h, når $0 \le t \le 1,5$.

b) Bestem loddets højde over gulvet, når $t = 0,7$.

c) Bestem, hvor lang tid loddets højde $h(t)$ er over 100 cm.

2.D2.11 Den gennemsnitlige dagtemperatur i Kangerlussuaq på Grønland kan med tilnærmelse beskrives ved funktionen

$$f(x) = -5{,}0 + 15{,}8 \cdot \sin(0{,}0172 \cdot x - 2{,}1) ,$$

hvor x er dagens nummer*), og $f(x)$ er den gennemsnitlige dagtemperatur, målt i °C, på dag nr. x.

a) Tegn grafen for funktionen f i intervallet $1 \leq x \leq 365$.

b) Bestem den gennemsnitlige dagtemperatur på dag nr. 50.

c) Hvad er den største gennemsnitlige dagtemperatur i Kangerlussuaq?

d) Bestem ved brug af grafen numrene på de dage, hvor den gennemsnitlige dagtemperatur er over 5 °C.

—

*)
Dagene nummereres således, at 1. januar er dag nr. 1, osv.

2.D2.12 En funktion f er givet ved

$$f(x) = x - \frac{3}{x} \ , \quad x > 0 .$$

a) Gør ved hjælp af $f'(x)$ rede for, at funktionen f er voksende.

b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.

2.D2.13 Der er givet funktionen $f(x) = \sqrt{x} - x + 7$, $x > 0$.

a) Løs ligningen $f'(x) = 0$.

b) Bestem monotoniforholdene for f .
Bestem maksimum for f .

2.D2.14 En funktion f er givet ved

$$f(x) = \ln(x) - 0{,}25x^2 + 4, \quad x > 0 .$$

a) Bestem førstekoordinaten til det punkt på grafen for f, hvor tangentens hældningskoefficient er $-0{,}5$.

2.D2.15 Der er givet funktionen

$$f(x) = 0{,}125x^3 - 4{,}5x^2 + 48x - 151\,.$$

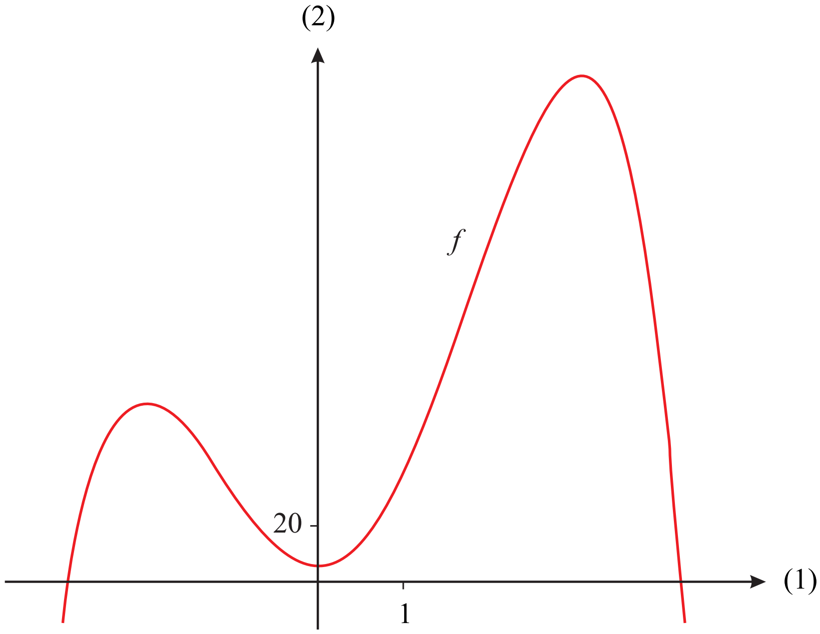
a) Løs ligningen $f'(x) = 0$, og bestem de lokale ekstrema.

b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $(4,\ f(4))$.

Grafen for f har to tangenter med hældningskoefficient $-4{,}5$.

c) Bestem førstekoordinaten til røringspunktet for hver af disse to tangenter.

2.D2.16



Figuren viser grafen for funktionen $f(x) = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2 + 5$.

a) Bestem $f(-2)$ og $f'(-2)$, og gør rede for, hvad disse tal fortæller om grafen.

b) Bestem funktionens monotoniforhold ved hjælp af $f'(x)$.

2.D2.17 En funktion f er givet ved forskriften

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 4\,.$$

Tangenten til grafen for f med røringspunktet $(2, f(2))$ betegnes l.

a) Bestem en ligning for tangenten l.

Grafen for f har en anden tangent m, der er parallel med l.

b) Bestem førstekoordinaten til røringspunktet for denne tangent.

2.D2.18 Grundvandet er flere steder i Danmark forurenet med stoffet BAM.
En bestemt type ufarlige bakterier kan nedbryde BAM.
I et forsøg tilsætter man disse bakterier til en grundvandsprøve.

Koncentrationen af BAM i prøven kan herefter beskrives ved modellen

$$f(x) = 1{,}60 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}0758 \cdot x} \quad ,$$

hvor x er tiden efter forsøgets start (målt i timer), og $f(x)$ er koncentrationen af BAM i prøven (målt i μg/L).
Koncentrationen af BAM i vandet må højst være 0,1 μg/L, hvis det skal bruges til at drikke.

a) Bestem koncentrationen af BAM i grundvandsprøven efter 48 timer, og vurdér, om grundvandet i prøven må drikkes efter de 48 timer.

b) Bestem $f'(10)$, og forklar betydningen af dette tal.

2.D2.19 Udviklingen i antallet af Facebook-brugere kan beskrives ved modellen

$$f(x) = \frac{1206}{1 + 6{,}06 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}922x}} \; ,$$

hvor x er antal år efter 2008, og $f(x)$ er antal Facebook-brugere, målt i millioner.

a) Hvor mange Facebook-brugere var der i 2011 ifølge modellen?

b) Med hvilken hastighed voksede antallet af Facebook-brugere i 2011 ifølge modellen?

I modellen indgår tallet 1206.

c) Tegn grafen, og gør rede for, hvad tallet 1206 fortæller om udviklingen i antallet af Facebook-brugere.

2.D2.20

Fotoet viser et apparat til at teste ølskum.

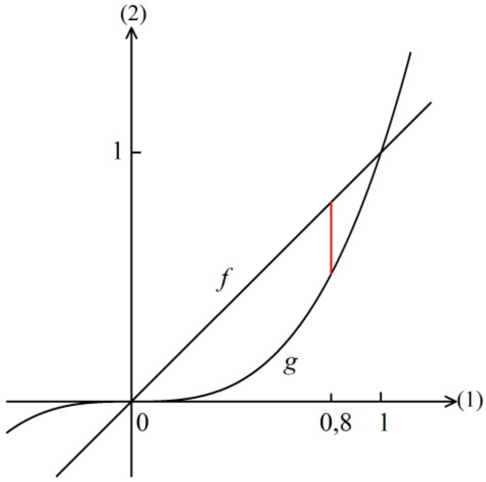
For et bestemt ølmærke er der målt, hvordan skumhøjden i glasset aftager med tiden. Sammenhængen kan beskrives ved modellen

$$f(x) = 11{,}2 \cdot e^{-0{,}223x},$$

hvor x er antal minutter efter opskænkningen af øllet, og $f(x)$ er skumhøjden (målt i cm).

a) Bestem den hastighed, hvormed skumhøjden aftager til tidspunktet 0,5 minutter efter opskænkningen af øllet.

2.D2.21



Figuren viser graferne for funktionerne $f(x) = x$ og $g(x) = x^3$.
Funktionen

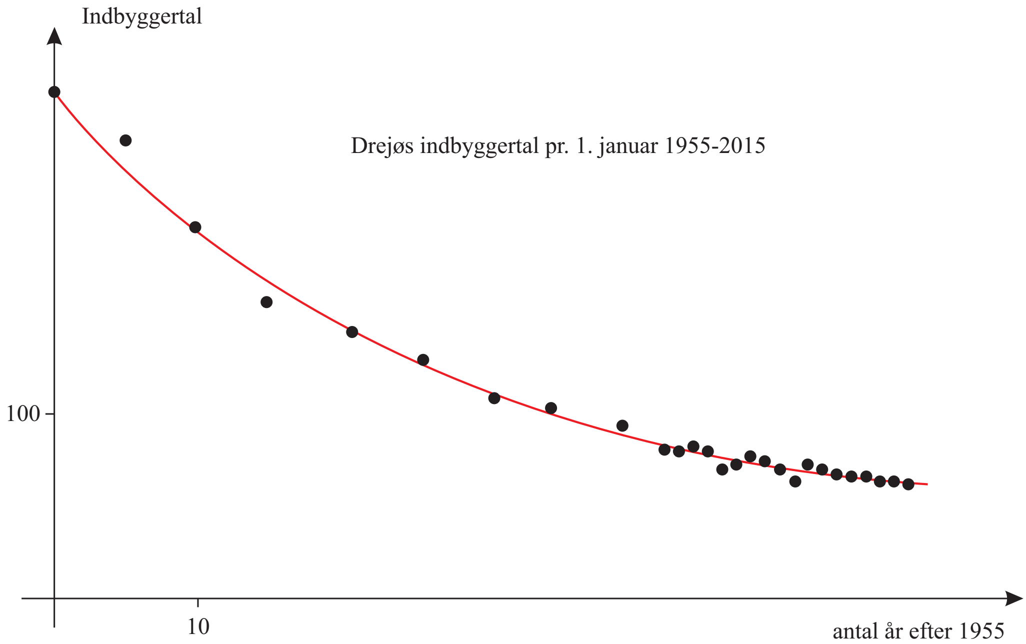
$$h(x) = x - x^3$$

beskriver for $0 \leq x \leq 1$ den lodrette afstand mellem de to grafer.

a) Bestem den lodrette afstand (se figur) mellem de to grafer, når $x = 0,8$.

b) Bestem den maksimale lodrette afstand mellem de to grafer i intervallet $0 \leq x \leq 1$.

2.D2.22



Figuren viser udviklingen i indbyggertallet på øen Drejø. Denne udvikling kan med god tilnærmelse beskrives ved modellen

$$f(x) = \frac{290}{1,0492^x + 0,263} + 46 \ ,$$

hvor $f(x)$ er indbyggertallet, og x er antal år efter 1955.

a) Bestem indbyggertallet i 2015 ifølge modellen.

b) Bestem $f'(10)$ og $f'(50)$.
Hvad fortæller disse to tal om udviklingen?

Kilde: Statistikbanken.

2.D2.23

Figuren viser skelettet af en T-rex (Tyrannosaurus Rex). Kilde: Wikipedia.org

Vægten af en T-rex kan beskrives ved formlen

$$f(x) = \frac{10000}{1 + 30762 \cdot 0{,}478^x} + 5\,,$$

hvor x er T-rex'ens alder i år, og $f(x)$ er vægten i kg.

a) Hvad vejer en 14 år gammel T-rex?

b) Bestem $f'(14)$. Hvad fortæller dette tal om vægten af en T-rex?

c) Er der ifølge modellen en øvre grænse for vægten af en T-rex?
Begrund svaret.

Kilde: plosone.org

2.D2.24 En keramiker producerer en bestemt type vase.
I en model kan det månedlige overskud ved salget af disse vaser beskrives ved

$$O(x) = -0{,}1x^2 + 100x - 9000\,,$$

hvor $O(x)$ er det månedlige overskud i kr. ved en salgspris på x kr. for en vase.
Modellen gælder for salgspriser mellem 250 kr. og 750 kr.

a) Bestem det månedlige overskud, hvis keramikeren vælger at sætte salgsprisen til 600 kr.

b) Tegn grafen for $O(x)$.

c) Hvilken salgspris vil give det største månedlige overskud?

d) Bestem $O'(600)$, og forklar betydningen af dette tal.

2.D2.25 Det årlige antal patienter i børne- og ungepsykiatrien i perioden fra 2009 til 2016 kan beskrives med modellen

$$f(x) = 1849x + 20686,$$

hvor $f(x)$ er det årlige antal patienter x år efter 2009.

a) Hvor mange patienter var der i 2016 ifølge modellen?

I samme periode faldt de årlige udgifter pr. patient. Udviklingen kan beskrives med modellen:

$$g(x) = -2268 \cdot x + 60095,$$

hvor $g(x)$ er de årlige udgifter pr. patient i kr. x år efter 2009.

b) I hvilket år kom udgiften pr. patient ned under 50000 kr. ifølge modellen?

De samlede årlige udgifter $h(x)$ i kr. for børne- og ungepsykiatrien kan beskrives med modellen

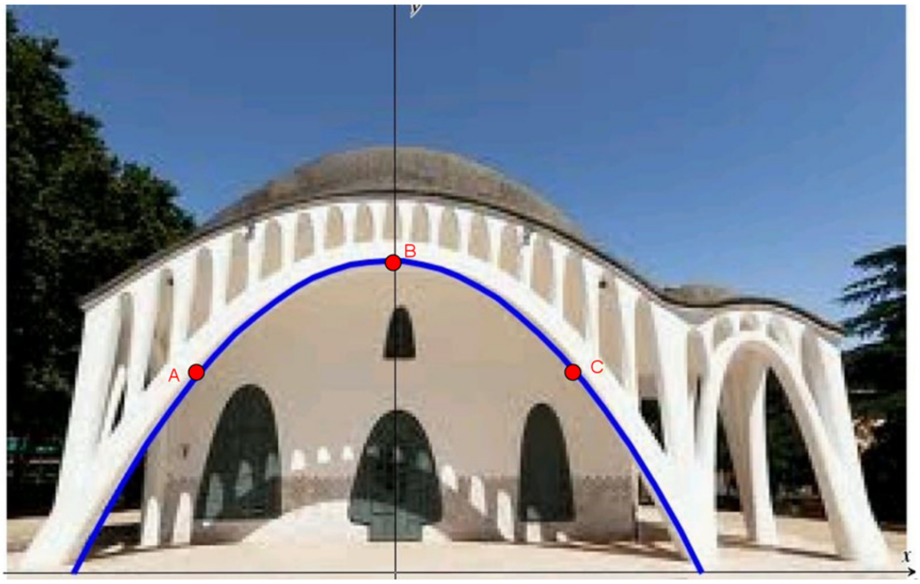
$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

c) Tegn grafen for h.

d) Undersøg ved hjælp af grafen, hvornår de samlede årlige udgifter vil begynde at falde, hvis udviklingen fortsætter.

Kilde: Cevea.dk

2.D2.26



Figuren viser en del af bygningen Masia Freixa i byen Terrassa nær Barcelona.
Den blå bue på figuren kan beskrives som en del af grafen for en funktion af formen

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \,.$$

I det koordinatsystem, der er indtegnet på figuren, går den blå bue gennem punkterne

$$A(-4,\ 3.32),\ B(0, 6.15) \text{ og } C(4, 3.32)$$

Enheden på begge akser er meter.

a) Bestem tallene a, b og c.

b) Benyt $f(x)$ til at bestemme bredden af den blå bue ved jordoverfladen.

3. Analytisk geometri

Delprøve 1

3.D1.1 En cirkel har ligningen $x^2+10x+y^2-12y+12=0$.

a) Bestem centrum og radius for cirklen.

b) Gør rede for, at cirklen har to skæringspunkter med førsteaksen.

3.D1.2 En linje *l* er givet ved ligningen

$$l:\ y=-\frac{1}{3}x+5\ .$$

En linje *m* er ortogonal på *l*. Det oplyses, at punktet $P(2,10)$ ligger på *m*.

a) Bestem en ligning for linjen *m*.

3.D1.3 Der er givet to punkter $A(-2,3)$ og $B(6,9)$.

a) Bestem afstanden $|AB|$.

b) Bestem midtpunktet *M* for linjestykket *AB*.

Cirklen *C* har radius $r=|AM|$ og centrum i *M*.

c) Bestem en ligning for cirklen *C*.

3.D1.4 En cirkel har centrum i $C(5,7)$ og radius $r=1$.

a) Bestem en ligning for cirklen.

En linje l har ligningen $y=2x-2$.

b) Bestem afstanden fra linjen l til punktet C.

c) Bestem antallet af skæringspunkter mellem l og cirklen.

3.D1.5

a) Vis, at $x=3$ og $x=-3$ er løsninger til andengradsligningen

$$x^2-2x+(x+1)^2-19=0\ .$$

En linje *l* har ligningen $y=x+1$.
En cirkel *C* har ligningen $x^2-2x+y^2-19=0$.

b) Hvad fortæller løsningerne til ligningen i a) om cirklen *C* og linjen *l* ?

3.D1.6 En linje har ligningen $y = x + 2$ og en cirkel har ligningen $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$.
Det oplyses, at der er to skæringspunkter mellem linjen og cirklen.

a) Bestem koordinatsættene til de to skæringspunkter.

Delprøve 2

3.D2.1 I et koordinatsystem er der givet et punkt $P(3,8)$ og en linje l bestemt ved ligningen

$$y = -\frac{2}{3}x - 3.$$

a) Bestem ved beregning afstanden fra punktet P til linjen l.

b) Bestem en ligning for den linje m, der går gennem P og som er vinkelret på l.

c) Bestem hældningsvinklen for linjen m.

3.D2.2 En cirkel C_1 har ligningen $x^2 - 2x + y^2 - 8y + 7 = 0$, og en linje l har ligningen

$$y = 2x - 3.$$

a) Tegn C_1 og l i samme koordinatsystem.

b) Bestem ved hjælp af tegningen koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem C_1 og l.

En anden cirkel C_2 har centrum i punktet $C(3,-2)$ og radius $\sqrt{5}$.

c) Gør rede for, at linjen l er tangent til cirklen C_2.

3.D2.3 To linjer l og m er givet ved ligningerne

$$l: y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{2} \quad \text{og} \quad m: y = 3x + 1.$$

a) Beregn den spidse vinkel mellem l og m.

En cirkel har centrum i punktet $C(1,-1)$ og har linjen l som tangent.

b) Bestem en ligning for cirklen.

3.D2.4 En linje l går gennem punktet $P(4,7)$ og har hældningsvinklen $v = 30°$.

a) Bestem en ligning for l.

3.D2.5 I et koordinatsystem har en trekant ABC vinkelspidserne $A(2,-5)$, $B(4,3)$ og $C(-4,5)$.

a) Bestem længden af højden h_b i trekant ABC.

3.D2.6 I et koordinatsystem har punktet *A* koordinatsættet (2, 8), og linjen *l* er givet ved ligningen $y = -0,75x + 3,25$.

Punktet *B* ligger på *l* i afstanden 7 fra *A*. Det oplyses, at *B* har en negativ første-koordinat.

a) Bestem koordinatsættet for punktet *B*.

Punktet *C* ligger også på linjen *l*, således at punkterne *A*, *B* og *C* danner en trekant, hvor vinkel *B* er spids.

Det oplyses, at arealet af trekant *ABC* er 20.

b) Bestem koordinatsættet for punktet *C*.

3.D2.7 Der er givet tre punkter *A*(1,7), *B*(8,11) og *C*(6,2).

a) Tegn i samme koordinatsystem den rette linje *l*, der går gennem punkterne *A* og *B*, og cirklen med centrum i punktet *C* og radius 5.

b) Bestem den korteste afstand fra linjen *l* til cirklen.

3.D2.8 a) Løs ligningen $-x^2 + 4x - 7 = -4x + 3$.

En parabel er givet ved $y = -x^2 + 4x - 7$, og en ret linje er givet ved $y = -4x + 3$.

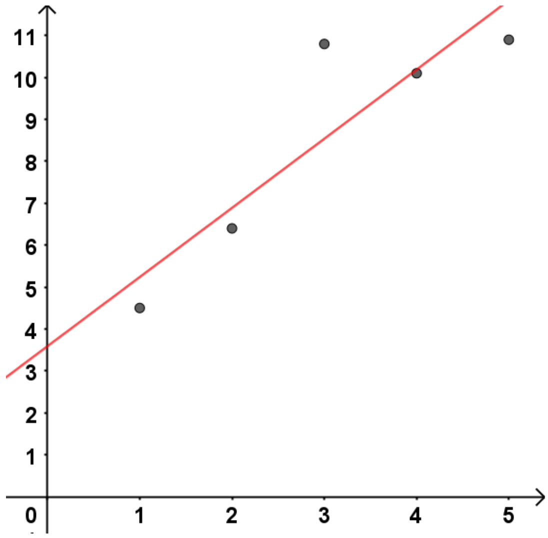
b) Tegn parablen og linjen i det samme koordinatsystem.

c) Giv en grafisk fortolkning af ligningen i a) og dens løsninger.

4. Statistik og regressionsanalyse

Delprøve 1

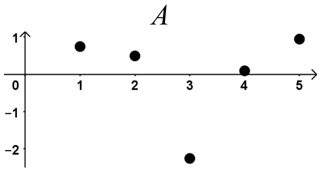
4.D1.1



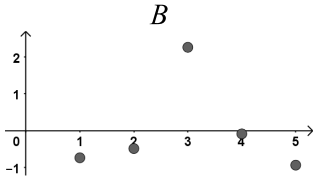
Figuren viser et punktplot af et datasæt. Der udføres lineær regression på datasættet. Den røde linje på figuren er regressionslinjen.

a) Bestem, hvilke(n) af nedenstående tre figurer der viser residualplottet hørende til den lineære regression. Begrund dit svar.

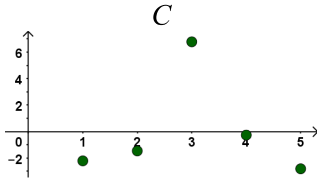
A



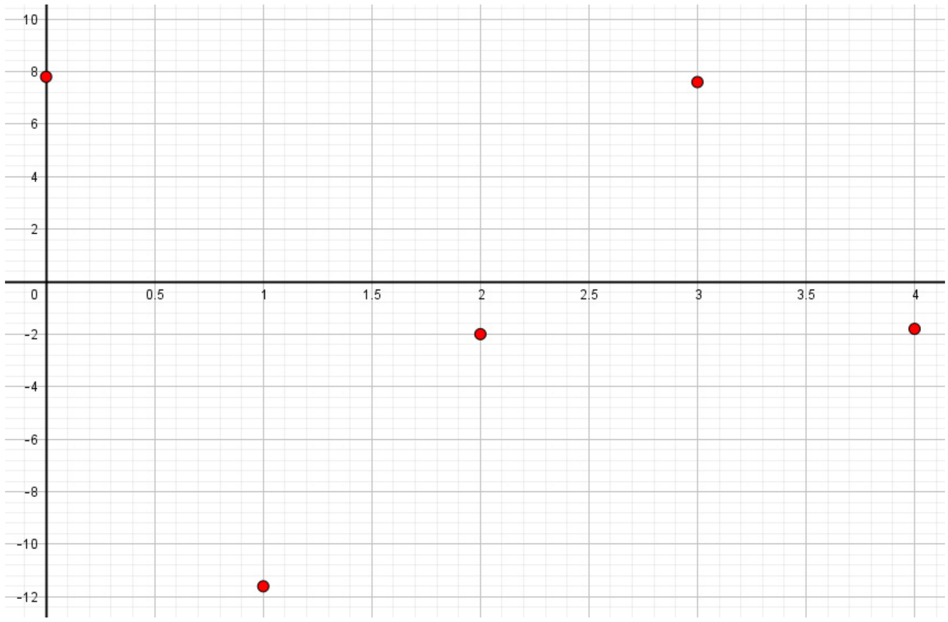
B



C



4.D1.2 I en model kan udviklingen i det antal laks, der årligt blev fanget i Skjern Å i perioden 2002-2006, beskrives ved en lineær funktion af antal år efter 2002.
Der udføres lineær regression, og nedenstående figur viser residualplottet.



a) Hvilket årstal var der størst forskel mellem det faktiske antal fangede laks og den tilsvarende modelværdi?

Det oplyses, at der ifølge modellen blev fanget 193 laks i 2004.

b) Bestem, hvor mange laks der faktisk blev fanget i 2004.

Delprøve 2

4.D2.1 Tabellen viser verdens befolkningstal fra 1970 til 2015.

Årstal	1970	1971	…	2015
Verdens befolkningstal i mia.	3,70	3,78	…	7,38

Alle tabellens data findes i det vedhæftede bilag: Bilag_VerdensBefolkningstal_data

Udviklingen i verdens befolkningstal beskrives ved en lineær model

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor $f(x)$ er verdens befolkningstal (målt i mia.), x år efter 1970.

a) Bestem tallene a og b ved lineær regression.

b) Tegn residualplot, og benyt dette til at vurdere den lineære models anvendelighed til at beskrive udviklingen.

Bilag_VerdensBefolkningstal_data.xlsx

4.D2.2 Tabellen viser sammenhørende værdier af listeprisen på GMC pickup trucks og den bedste pris bilerne kan købes til. Enheden på begge priser er dollar ($).

Listepris ($)	12400	14300	…	21200
Bedste pris ($)	11200	12500	…	18600

Alle af tabellens data findes i det vedhæftede bilag: Bilag_PrisTruck_data

I en model kan sammenhængen beskrives ved en model af typen

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor $f(x)$ er den bedste pris på en GMC pickup truck med listeprisen x.

a) Vis ved regression, at sammenhængen kan beskrives ved

$$f(x) = 0{,}851x + 435.$$

b) Bestem residualet for pickup truck'en med listeprisen 15500 kr.

Bilaget indeholder en liste over alle residualer.

c) Tegn et boksplot over residualerne, og afgør, om residualet i b) er en outlier.

Bilag_PrisTruck_data.xlsx

Kilde: college.cengage.com

4.D2.3 Tabellen viser det årlige elforbrug pr. indbygger og den årlige udledning af CO_2 pr. indbygger i 2014 for 100 af verdens fattigste lande

Elforbrug (kWh)	51	109	…	5063
CO_2 (ton) pr. indbygger	0,11	0,06	…	6,18

Alle tabellens data findes i vedhæftede bilag: Lande-data

Det antages, at sammenhængen kan beskrives ved en lineær model $f(x) = a \cdot x + b$, hvor $f(x)$ er den årlige udledning af CO_2, målt i ton, og x er det årlige elforbrug målt i kWh.

a) Tegn et punktplot af tabellens data.

b) Bestem tallene a og b.

c) Tegn et residualplot, og bestem residualspredningen s.

d) Undersøg, hvor mange af residualerne der ligger uden for intervallet $[-2s\,;\,2s]$.

Lande-data.xlsx

Kilde: Globalis.dk

4.D2.4 Tabellen viser indbyggertallet på øen Sejerø.

År	1976	1981	…	2018
Indbyggertal	505	481	…	344

Alle tabellens data findes i vedhæftede bilag: Sejerø

I en model beskrives udviklingen ved funktionen $f(t) = a \cdot t + b$, hvor $f(t)$ angiver indbyggertallet på Sejerø t år efter 1976.

a) Tegn et punktplot af alle data.

b) Bestem konstanterne a og b ved regression.

c) Benyt et residualplot og residualspredningen til at vurdere modellens anvendelighed til at beskrive udviklingen.

Sejerø.xlsx

4.D2.5 Tabellen viser folketallet i Norge i perioden 1951-1974.

År	1951	1952	…	1974
Folketal (mio.)	3,280	3,311	…	3,973

Alle tabellens data findes i vedhæftede bilag: Norge

I en model beskrives udviklingen ved $f(t) = a \cdot t + b$, hvor $f(t)$ angiver indbyggertallet (i mio.) i Norge t år efter 1951.

a) Tegn et punktplot over data, og bestem konstanterne a og b.

b) Benyt residualplot og residualspredning til at vurdere modellens anvendelighed til at beskrive udviklingen.

c) Vurdér modellens rækkevidde, når det oplyses, at indbyggertallet i Norge i 2018 var 5,296 mio.

kilde: ssb.no

Norge.xlsx

5. Kombinatorik, sandsynlighedsregning, test og konfidensinterval

Delprøve 1

5.D1.1

En stokastisk variabel X har sandsynlighedsfordelingen

t	10	20	30	40
$P(X=t)$	0,2	p	0,1	0,3

a) Bestem tallet p.

b) Bestem middelværdien for X.

5.D1.2

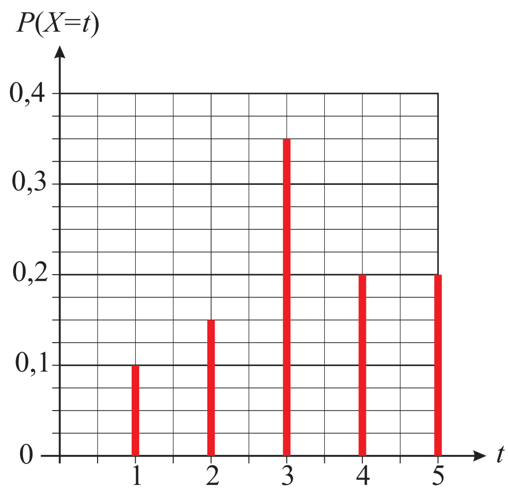
Blandt en gruppe på 7 personer skal der vælges 3 personer til at lave mad.
De 3 personer vælges ved lodtrækning.

a) På hvor mange forskellige måder kan de 3 personer vælges?

De 7 personer består af 2 drenge og 5 piger.

b) Bestem sandsynligheden for, at der bliver valgt 1 dreng og 2 piger.

5.D1.3 Figuren viser sandsynlighedsfordelingen for en stokastisk variabel X.



a) Udfyld et skema som nedenstående.

t	1	2	3	4	5
$P(X=t)$					

b) Bestem middelværdien for X.

c) Bestem sandsynligheden $P(X \geq 3)$.

5.D1.4 Nedenstående tabel viser sandsynlighedsfordelingen for en stokastisk variabel.

t	0	2	4	6	8	10
$P(X=t)$	0,05	a	a	a	0,25	0,10

a) Bestem tallet a.

b) Bestem middelværdien μ for X.

c) Bestem $P(X \leq \mu)$.

5.D1.5 I en pose ligger der 15 kugler. På tilfældig vis udvælges 2 kugler fra posen.

a) Gør rede for, at dette kan gøres på 105 forskellige måder.

I posen er der 8 røde kugler og 7 grønne kugler.

b) Bestem sandsynligheden for, at de 2 kugler har samme farve.

5.D1.6 Af den danske befolkning har 64 % blå øjne. Blandt danskere udtages en tilfældig stikprøve på 250 personer.

a) Indfør en passende stokastisk variabel X, og opstil en binomialmodel for antallet af danskere med blå øjne i stikprøven.

b) Opstil en formel til beregning af sandsynligheden for, at der er præcis 150 danskere med blå øjne i stikprøven.

5.D1.7 Der udtages en stikprøve blandt den danske befolkning.
Den binomialfordelte stokastiske variabel X betegner antallet af rygere i stikprøven.
Det oplyses, at sandsynligheden for, at der er præcis 8 rygere i stikprøven, kan beregnes ved

$$P(X=8)=\frac{40!}{8!\cdot 32!}\cdot 0,21^{8}\cdot 0,79^{32}\ .$$

a) Forklar betydningen af tallene 40 og 0,21 i formlen.

5.D1.8 Den stokastiske variabel X er binomialfordelt med antalsparameter $n=16$ og sandsynlighedsparameter 0,5.

a) Hvilke udfald for X er normale udfald?

Delprøve 2

5.D2.1 Der skal dannes en kode bestående af 3 bogstaver.
Et bogstav kan kun bruges én gang i koden, og alle 28 bogstaver i alfabetet kan anvendes.
Koden dannes ved at vælge de tre bogstaver tilfældigt.

a) Bestem sandsynligheden for, at koden udelukkende består af vokaler *).

*) Vokalerne er: a, e, i, o, u, y, æ, ø, å.

5.D2.2 En haveejer vil købe nye roser. Hun går til en planteskole for at købe 4 forskellige røde roser og 6 forskellige gule roser.
Planteskolen kan tilbyde 12 forskellige røde roser og 9 forskellige gule roser.

a) Gør rede for, at haveejeren har 41580 forskellige muligheder for at foretage sit indkøb i planteskolen.

5.D2.3 I en papæske befinder der sig 20 daggamle kyllinger, 10 af hvert køn.
Der udtages på tilfældig måde 3 kyllinger.

a) Hvad er sandsynligheden for, at alle tre kyllinger er af hunkøn?

På en landejendom med et meget stort antal kyllinger antager man, at der er lige mange af hvert køn.
Der udtages på tilfældig måde 3 kyllinger.

b) Hvad er sandsynligheden for, at alle tre kyllinger er af hunkøn?

5.D2.4 I et sædvanligt spil kort er der 52 kort, hvoraf de 12 er billedkort.

Der trækkes på tilfældig måde og samtidigt 3 kort.

a) Bestem sandsynligheden for, at ingen af de tre kort er et billedkort.

b) Bestem sandsynligheden for, at der bliver udtaget mindst ét billedkort.

5.D2.5 I et sædvanligt spil kort med 52 kort er der 13 kort med hver kulør (ruder, hjerter, spar og klør). Der udtages samtidigt og på tilfældig måde 4 kort.

En hændelse H er givet ved

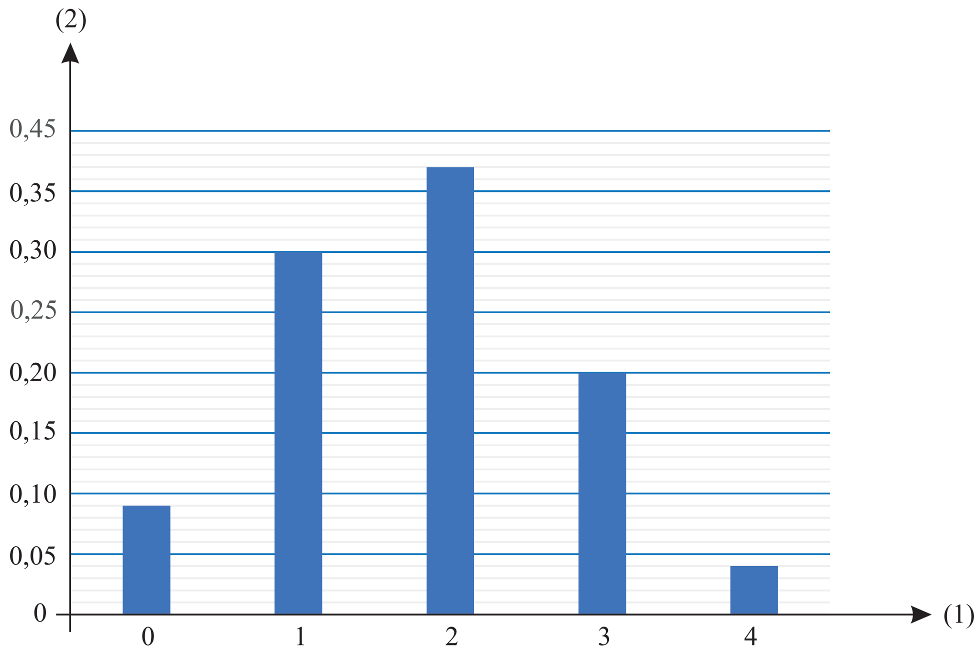
H: De 4 kort er 3 klør og 1 ruder.

Sandsynligheden $P(H)$ for hændelsen H kan beregnes som

$$P(H) = \frac{K(13,3) \cdot K(13,1)}{K(52,4)} \quad .$$

a) Forklar dette udtryk, og bestem $P(H)$ med 4 decimaler.

5.D2.6



Figuren viser sandsynlighedsfordelingen for en binomialfordelt stokastisk variabel X med antalsparameter $n = 4$.

a) Udfyld et skema som nedenstående.

t	0	1	2	3	4
$P(X = t)$					

b) Bestem sandsynlighedsparameteren p.

5.D2.7 På et æggepakkeri har det vist sig, at 1 æg ud af 20 har to blommer. Æggene pakkes i bakker med 30 æg i hver bakke. Den stokastiske variabel X betegner antallet af æg med to blommer i en tilfældigt valgt bakke med 30 æg.

a) Bestem antalsparameteren og sandsynlighedsparameteren for X.

b) Bestem sandsynligheden for, at der blandt 30 tilfældigt valgte æg er mere end ét æg med to blommer.

c) Bestem middelværdi og spredning for X.

5.D2.8 I forbindelse med en influenzaepidemi fik 30 % af eleverne i landets folkeskoler influenza.

a) Bestem sandsynligheden for, at der blandt 25 tilfældigt valgte elever var netop 7, der fik influenza.

Den stokastiske variabel X betegner antallet af elever i en klasse på 25, der får influenza.

b) Bestem middelværdi μ og spredning σ for X.

I en bestemt klasse med 25 elever fik 16 elever influenza.

c) Er det exceptionelt mange?

5.D2.9 Der kastes med en symmetrisk terning. Det gælder om at slå seksere.

a) Bestem sandsynligheden for, at få 2 eller flere seksere i en serie på 12 kast.

b) Hvor mange kast skal der mindst være i serien, for at sandsynligheden for at få 2 eller flere seksere i serien kommer over 95 %.

5.D2.10 Et flyselskab har gennem statistiske undersøgelser fundet ud af, at sandsynligheden er 15 % for, at en passager, der har bestilt plads til en bestemt afgang, ikke møder op. Til en sådan afgang har selskabet accepteret bestillinger til 50 personer, selv om flyet kun har 48 pladser.

a) Bestem sandsynligheden for, at alle 50 møder op.

b) Bestem sandsynligheden for, at alle personer, der møder op, kan få en plads på flyet.

5.D2.11

51,0 % af den voksne befolkning er moderat eller svært overvægtige.

Kilde: Sundhedsstyrelsen, marts 2018.

a) Bestem sandsynligheden for, at der blandt 28 tilfældigt valgte voksne danskere er netop 14, der er moderat eller svært overvægtige.

b) Bestem sandsynligheden for, at der blandt 28 tilfældigt valgte voksne danskere højst er 4, der er moderat eller svært overvægtige.

I en hf-klasse med 28 elever er der 4 overvægtige.

c) Benyt et 95 % konfidensinterval til at vurdere, om hf-klassen med hensyn til vægt kan antages at være et tilfældigt udvalg af voksne danskere.
Inddrag resultatet i b) i denne vurdering.

5.D2.12 En patient lider af kronisk hovedpine. Hun har erfaret, at det i 70 % af tilfældene hjælper at benytte en bestemt slags tabletter. Hun prøver nu nogle nye tabletter og ønsker at teste nulhypotesen:

H_0: *De nye tabletter virker i højst 70 % af tilfældene.*

a) Udfør et binomialtest på signifikansniveau 5 % af nulhypotesen, når det oplyses, at de nye tabletter hjalp ved 16 ud af 20 hovedpineanfald.

5.D2.13 Ved produktion af en bestemt vare skal mindst 85 % af vareenhederne være fejlfri. Ved en stikprøvekontrol udtager man en stikprøve på 40 enheder fra produktionen. Man konstaterer, at 29 af vareenhederne er fejlfri, og resten er defekte.

a) Udfør et venstresidet binomialtest på signifikansniveau 5 % af nulhypotesen

H_0: 85 % *af vareenhederne er fejlfri.*

b) Bestem det kritiske område for testet, hvis der vælges et signifikansniveau på 1 %.

5.D2.14 En mønt kastes 500 gange.
Den stokastiske variabel X angiver antallet af "plat" i 500 kast.

a) Bestem hver af sandsynlighederne $P(X \leq 230)$ og $P(X \geq 270)$, hvis det antages, at mønten er symmetrisk.

b) Opstil nulhypotesen for en dobbeltsidet test til på signifikansniveau 5 % at afgøre, om mønten er symmetrisk.

Det oplyses, at mønten viste plat i 270 af de 500 kast.

c) Bestem den kritiske mængde for testet, og brug denne mængde til at afgøre, om nulhypotesen kan forkastes.

5.D2.15 En mønt kastes 500 gange. Antallet af plat bliver 275.

a) Bestem 95 % konfidensintervallet for frekvensen af plat.

b) Afgør ved hjælp af konfidensintervallet, om det kan afvises, at mønten er symmetrisk.

5.D2.16 Lørdag den 17. maj 2008 offentliggjorde the Irish Times resultatet af en opinionsundersøgelse af holdningen til den planlagte folkeafstemning om Lissabon-traktaten. Stikprøvestørrelsen var 1000, og 35 % af de adspurgte sagde, at de ville stemme "ja".

a) Bestem 95 % konfidensintervallet for den andel af befolkningen, der ville stemme "ja" på dette tidspunkt.

5.D2.17 I en meningsmåling blandt 805 tilfældigt udvalgte elever fra de ældste klasser i Københavns Kommune svarede 8,1 %, at de ville stemme på Liberal alliance.

a) Bestem ud fra denne meningsmåling et 95 % konfidensinterval for tilslutningen til Liberal Alliance i de ældste klasser i Københavns Kommune.

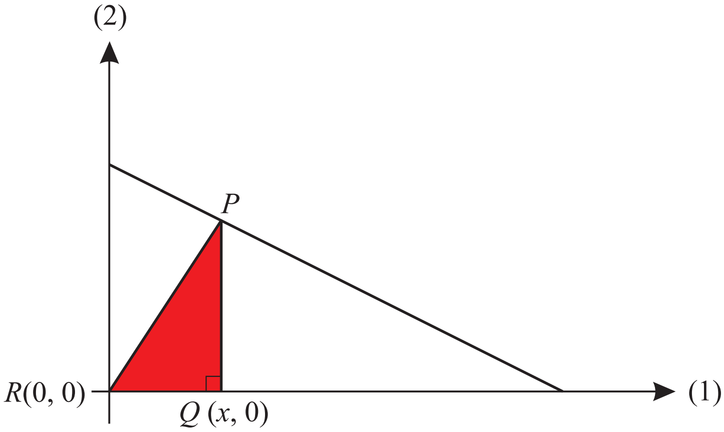
Den 31. januar 2019 afholdtes der skolevalg for alle landets ældste klasser.
Ved skolevalget fik Liberal Alliance 9,9 % af stemmerne.

b) Afgør, om meningsmålingen viser en signifikant lavere tilslutning til Liberal Alliance blandt eleverne i Københavns Kommune end i hele landet.

6. Broer

Delprøve 1

6.D1.1



Figuren viser grafen for funktionen

$$f(x) = -0,5x + 4, \quad 0 < x < 8 .$$

Figuren viser også en retvinklet trekant PQR , hvor
punktet $P(x, f(x))$ ligger på grafen for f,
punktet $Q(x,0)$ ligger på førsteaksen,
punktet $R(0,0)$ er koordinatsystemet begyndelsespunkt.

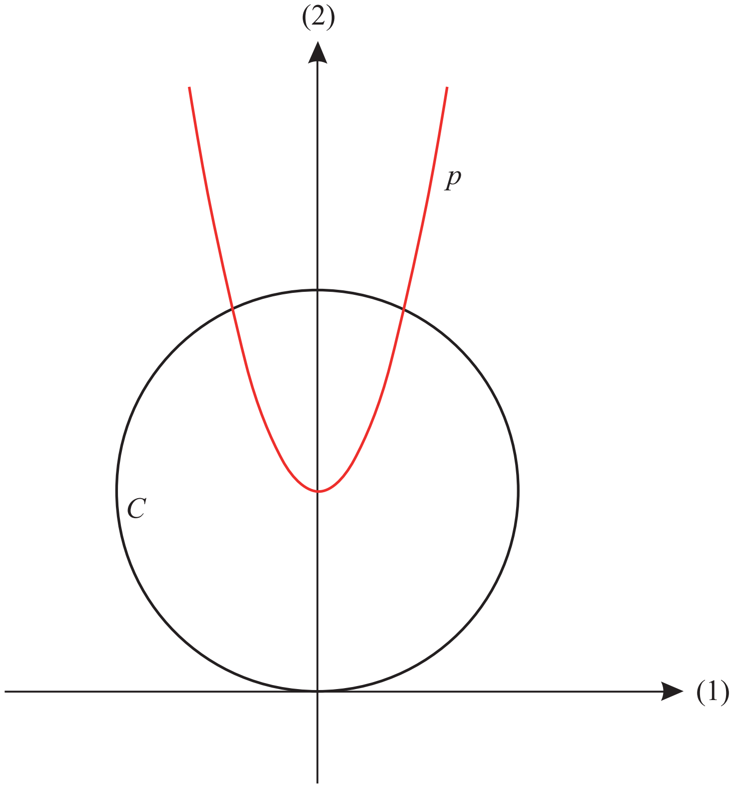
a) Bestem arealet af trekant PQR , når punktet Q har koordinatsættet $Q(3,0)$.

b) Gør rede for, at arealet af trekant PQR udtrykt ved x kan bestemmes ved

$$A(x) = -0,25x^2 + 2x .$$

c) Bestem x, så arealet af trekant PQR bliver størst muligt.

6.D1.2



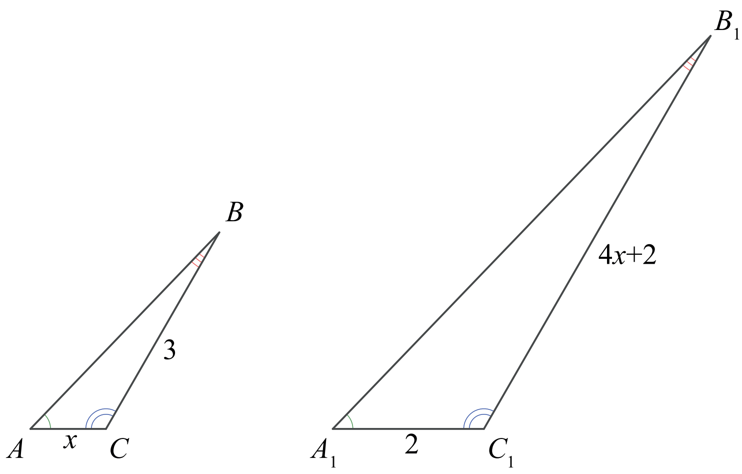
På figuren ses en cirkel C med ligningen $x^2+(y-5)^2=25$ og grafen for et andengrads-polynomium $p(x)=x^2+c$.

Det oplyses, at parablens toppunkt ligger i cirklens centrum.

a) Bestem tallet c.

Delprøve 2

6.D2.1



Figuren viser to ensvinklede trekanter ABC og $A_1B_1C_1$.
Længden af siden AC betegnes x.
Nogle af de øvrige sidelængder er oplyst på figuren.

a) Benyt figuren til at gøre rede for, at der gælder ligningen

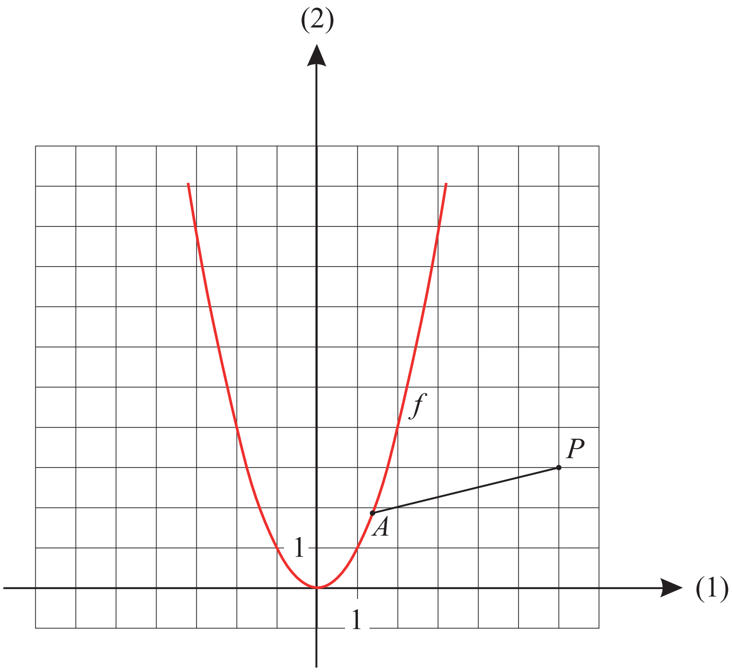
$$\frac{4x+2}{3}=\frac{2}{x}.$$

b) Gør rede for, at ligningen i a) kan omskrives til andengradsligningen

$$2x^2+x-3=0.$$

c) Bestem længden af siden AC.

6.D2.2



Figuren viser grafen for andengradspolynomiet $f(x) = x^2$ samt punktet $P(6, 3)$.
Punktet $A(x, x^2)$ ligger på grafen for f.

a) Gør rede for, at afstanden mellem punkterne A og P er givet ved

$$|AP| = \sqrt{(6-x)^2 + (3-x^2)^2} \ .$$

b) Bestem førstekoordinaten til A, så $|AP|$ bliver mindst mulig.

6.D2.3

Apollo-11 raketten, der sendte de første mennesker til månen i 1969

Tid (s)	0	1	2	…	20
Højde (m)	0	2	4	…	510

Alle data findes i vedhæftede bilag: raket_data

Tabellen viser tid efter start (målt i sekunder) og højde over jorden (målt i meter) for Apollo-11 raketten. Der er med god tilnærmelse tale om en model af typen

$$f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c\,,$$

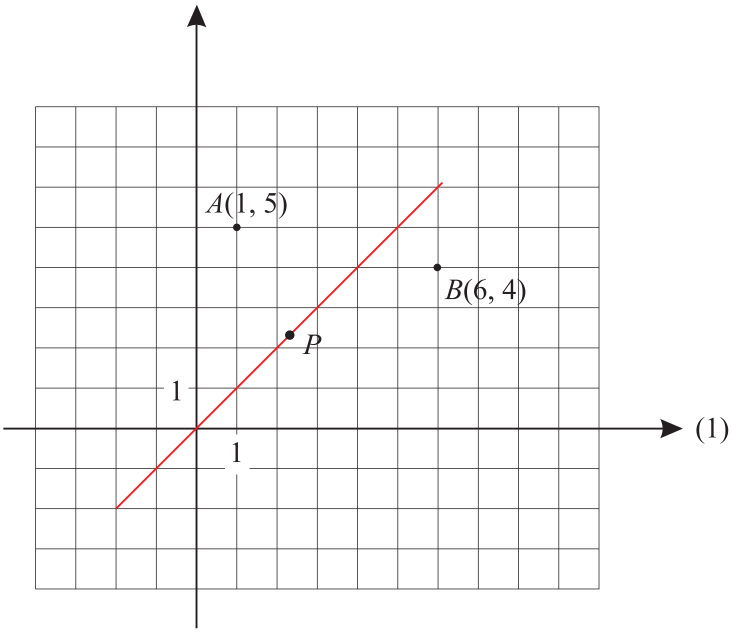
hvor $f(t)$ er højden (m) over jorden , og t er tid (s) efter start.

a) Bestem tallene *a, b* og *c* ved regression.

b) Bestem $f'(10)$, og gør rede for, hvad dette tal fortæller om ændringen af højden over jorden for Apollo-11 raketten.

Kilde: spacemath.gsfc.nasa.gov

6.D2.4



Der er givet punkterne $A(1,5)$ og $B(6,4)$.
Punktet $P(x,x)$ ligger på linjen med ligningen $y = x$.

a) Tegn i et tegneprogram de tre punkter, når P har koordinaterne (3,3), og bestem den samlede afstand $|AP|+|BP|$.

b) Vis, at den samlede afstand $|AP|+|BP|$ kan beskrives ved funktionen

$$f(x)=\sqrt{(x-1)^2+(x-5)^2}+\sqrt{(x-6)^2+(x-4)^2} \ ,$$

c) Bestem x, så den samlede afstand $|AP|+|BP|$ bliver mindst mulig.

6.D2.5 For perioden 2011-2017 kan den procentvise andel af de danske familier, der ejer en stationær computer beskrives ved modellen

$$f(x) = -2,7x + 53,5 \ ,$$

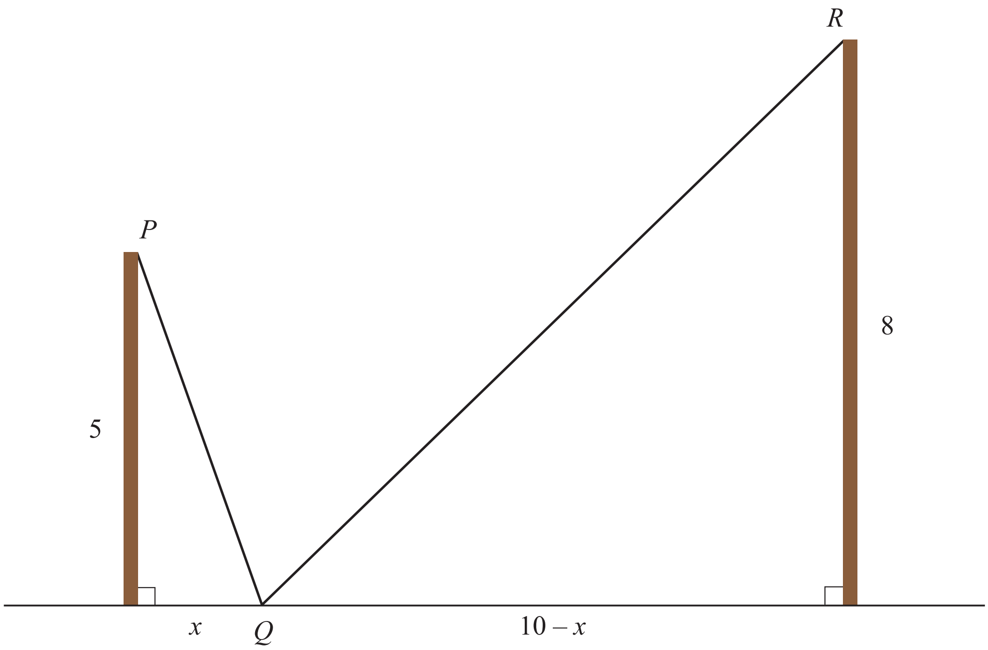
hvor $f(x)$ er den procentvise andel af de danske familier, der ejer en stationær computer x år efter 2011.

a) Hvor mange procent af familierne havde en stationær computer i 2016 ifølge modellen.

I det følgende antages, at $f(5)$ angiver sandsynligheden i % for, at en tilfældigt valgt familie i 2016 havde en stationær computer.
En elektronikforretning foretog i 2016 en rundringning til 10 tilfældigt valgte familier for at undersøge markedet for stationære computere.

b) Hvad er sandsynligheden for, at ingen af dem havde en stationær computer?

6.D2.6



Figuren viser to stolper, der er anbragt i 10 meters afstand. Stolperne er 5 m og 8 m høje. De skal forbindes med en wire fra toppen *P* af den ene stolpe til jorden i punktet *Q* og videre til toppen *R* af den anden stolpe.
Punktet *Q* befinder sig *x* meter til højre for den lave stolpe.

a) Gør rede for, at den samlede længde af wiren fra *P* til *R* via *Q* er givet ved

$$f(x)=\sqrt{5^2+x^2}+\sqrt{8^2+(10-x)^2}\ \text{, hvor } 0<x<10.$$

b) Bestem *x*, så den samlede længde af wiren er mindst mulig.

6.D2.7 En større dansk provinsby bliver ramt af en forkølelses-epidemi.
I de første 20 dage af epidemien kan udviklingen beskrives ved modellen

$$f(x)=\frac{11}{1+2{,}7\cdot 0{,}78^x}\quad ,$$

hvor $f(x)$ er den andel (målt i procent) af indbyggerne, der er forkølede, og *x* er antal dage efter epidemiens start.

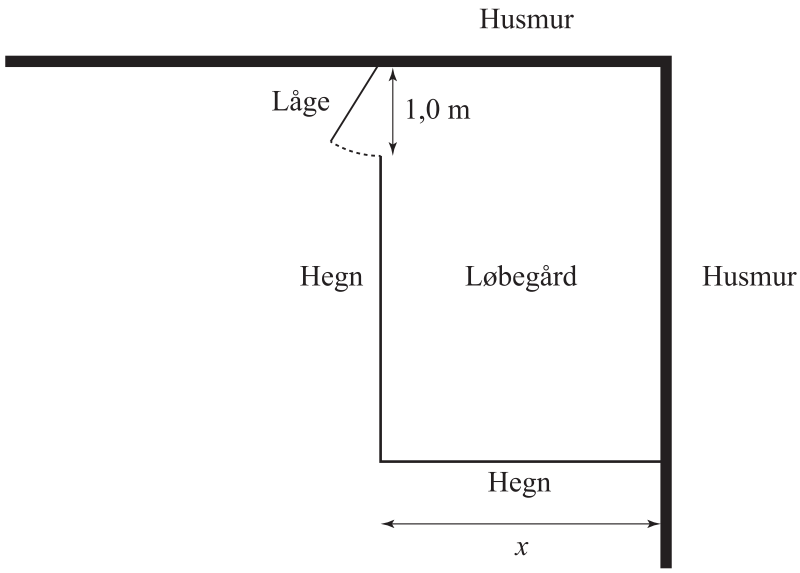
a) Tegn grafen for funktionen for $0\le x\le 20$.

b) Hvor mange dage efter epidemiens start er 10 % af indbyggerne forkølede?

På det tidspunkt, hvor 10 % af indbyggerne er forkølede, udtages på tilfældig måde 12 personer blandt byens indbyggere til en undersøgelse.

c) Bestem sandsynligheden for, at netop 2 af de 12 personer er forkølede.

6.D2.8



En hundeejer vil indhegne en rektangulær løbegård til sin hund.
På de to sider er der en husmur. De to andre sider udgøres af et trådhegn og en låge. Længden af den ene side er x meter, og lågen i den anden side er 1,0 meter bred (se figur). Trådhegnet er i alt 10,0 meter.

a) Gør rede for, at arealet $A(x)$ af løbegården som funktion af x (målt i meter) kan bestemmes ved

$$A(x) = x \cdot (11 - x), \text{ hvor } 0 < x < 10.$$

b) Bestem x, så arealet af løbegården bliver størst muligt.