UNDERVISNINGS
MINISTERIET
STYRELSEN FOR
UNDERVISNING OG KVALITET

Vejledende Enkeltopgaver

Matematik stx A-niveau

Marts 2020

Forord til Vejledende enkeltopgaver, stx A, efterår 2019

Grundlaget for de skriftlige prøver i matematik A er beskrevet gennem henholdsvis læreplan, undervisningsvejledning og de vejledende og de stillede opgavesæt ved de skriftlige prøver. I læreplanen hedder det om den skriftlige prøve:

"*Den skriftlige prøve*

Grundlaget for den skriftlige prøve er et todelt centralt stillet opgavesæt, som udleveres ved prøven, og forberedelsesmaterialet, jf. pkt. 3.2. Prøvens varighed er fem timer.

Det skriftlige opgavesæt består af opgaver stillet inden for kernestoffet samt i forberedelsesmaterialet, men andre emner og problemstillinger kan inddrages, idet grundlaget så beskrives i opgaveteksten.

Prøven er todelt. Ved første delprøve må der ikke benyttes andre hjælpemidler end en centralt udmeldt formelsamling. Efter udløbet af første delprøve afleveres besvarelsen heraf.

Opgaverne til anden delprøve udarbejdes ud fra den forudsætning, at eksaminanden råder over et matematisk værktøjsprogram, jf. pkt. 3.3."

Af undervisningsvejledningen fremgår *tidsrammen for den skriftlige prøve* samt, at der i eksamensgrundlaget indgår et *centralt stillet forberedelsesmateriale*:

"Den skriftlige prøve er centralt stillet og består af to delprøver, hvor delprøve 1 varer 2 timer, og delprøve 2 varer 3 timer. Desuden udsendes ca. 3 uger før prøven (sommerterminen) et forberedelsesmateriale, som eleverne selvstændigt under vejledning skal arbejde med i 6 timer, der afsættes af holdets samlede uddannelsestid. Materialet kan være en matematisk tekst, der uddyber eller perspektiverer et kernestofemne eller introducerer et helt nyt emne. Der kan heri indgå behandling af et større datamateriale. Opgavesættet består i begge delprøver af opgaver stillet inden for kernestoffet samt indhold og metoder fra forberedelsesmaterialet. Materialet vil danne grundlag for 10-15 procent af det samlede pointtal i et opgavesæt ved den skriftlige prøve.

Forberedelsesmaterialet er også gældende for den skriftlige eksamen ved de efterfølgende to prøveterminer, dvs. august (syge) og december (vinter) samme kalenderår."

Da forberedelsesmaterialet er unikt fra år til år, indeholder denne opgavesamling ikke eksempler på opgaver fra forberedelsesmaterialerne. Eksempler på forberedelsesmaterialer med tilhørende opgaver kan findes i de vejledende og de stillede opgavesæt. Desuden foreligger der flere eksempler på forberedelsesmaterialer med tilhørende opgavesæt, som tidligere har været stillet ved den skriftlige prøve i 'netforsøget' (forsøg med digitale opgaver), fx var emnet i forberedelsesmaterialet ved sommereksamen 2019 vektorfunktioner, og der findes således også opgaver i emnet i de tilhørende opgavesæt fra maj 2019, august 2019 samt vinter 2019.

De faglige mål, kernestof og mindstekrav samt bedømmelseskriterierne ved de afsluttende prøver findes ligeledes beskrevet i læreplanen. Denne udgivelse af vejledende enkeltopgaver kan ikke træde i stedet for læreplan og undervisningsvejledning, men skal alene ses som et supplerende materiale til støtte for undervisningen frem mod de skriftlige prøver. Gennem det skriftlige arbejde skal eleverne opnå fortrolighed med den centralt udmeldte formelsamling, som kan hentes via uvm.dk, hvor den ligger sammen med læreplan og undervisningsvejledning. Eleverne skal have adgang til en *'ren' udgave af formelsamlingen under delprøve 1* ved de skriftlige prøver.

Opgavesamlingen er ligesom de vejledende opgavesæt udarbejdet af opgavekommissionen, og opgaverne viser, hvordan både nye og gamle emner kan komme til udtryk i henhold til 2017-læreplanen. Opgavesamlingen udgør *ikke en udtømmende* beskrivelse af de opgavetyper, der kan og vil blive stillet ved de kommende skriftlige prøver, men repræsenterer en række forskelligartede måder, hvorpå et emne kan optræde i opgaver ved den skriftlige prøve. Antallet af opgaver inden for et bestemt emne er *ikke udtryk for en vægtning af pågældende emne*. Opgavesamlingen er heller *ikke et udtryk for forholdet mellem lette og svære opgaver* i et prøvesæt, fx er mindstekravsopgaver ikke markeret, og de er ikke repræsenteret i det omfang, der er krav om i et opgavesæt stillet til den skriftlige prøve. De *vejledende eksempler på mindstekravsopgaver* findes på EMU under STX, Matematik, Prøver og eksamen.

I undervisningsvejledningen hedder det i øvrigt om *læreplanen og lærebøger*:

"Læreplanen beskriver fagets indhold, arbejdsformer og redskaber. Undervisningsvejledningen folder læreplanens intentioner ud og operationaliserer sammen med de skriftlige eksamensopgavesæt læreplanens beskrivelse af kernestoffet.
Lærebogen derimod er de aktuelle forfatteres fortolkning af læreplanens formuleringer. Det er derfor helt centralt, at man som lærer orienterer sig i forskellige lærebøger, diskuterer disses forskellige udlægninger af læreplanens indhold med kolleger og på den baggrund skaber et solidt grundlag for implementering af læreplanens krav."

Formulering af eksamensopgaverne

Af undervisningsvejledningens afsnit 4.2 fremgår retningslinjerne for den skriftlige prøve på A-niveau:
"Ved delprøve 1 er eneste tilladte hjælpemiddel den centralt udmeldte formelsamling (ren, dvs. uden tilføjelser) til det aktuelle matematikniveau. Ved delprøve 2 må eksaminanden benytte alle hjælpemidler (bortset fra kommunikation med omverdenen), og opgaverne til denne del af prøven vil i forskelligt omfang kræve, at eksaminanden behersker et matematisk værktøjsprogram, der lever op til beskrivelsen i læreplanens afsnit 3.3.
Eksaminanderne får adgang til begge delprøver ved prøvens start, men må først tage yderligere hjælpemidler frem, når tiden til delprøve 1 er udløbet, og alle eksaminander har afleveret deres besvarelser af delprøve 1.
Der kan i særlige tilfælde i enkelte opgaver forekomme emner og problemstillinger, der ikke direkte er beskrevet i kernestoffet, og i sådanne tilfælde vil grundlaget for besvarelsen klart fremgå af opgaveformuleringen. Det kan fx være tilfældet i forbindelse med opgaver, der omhandler matematisk modellering, hvor der kan optræde funktionsudtryk, som eksaminanderne forventes at kunne håndtere med brug af et matematisk værktøjsprogram med CAS.
Hovedparten af opgaverne i det samlede opgavesæt tager udgangspunkt i det aktuelle matematikniveau (B- hhv. A-niveau) med inddragelse af elementer fra stofområdets behandling på de(t) underliggende niveau(er) (C- hhv. C/B-niveau) og med en niveausvarende taksonomi. Fx kan inddragelse af en parameter i en given formel være med til at løfte opgaven fra et regneteknisk niveau til et ræsonnerende niveau. Der kan også forekomme opgaver, der tager direkte udgangspunkt i stof hørende til de(t) underliggende niveau(er) (C- hhv. C/B-niveau), hvor problemstillingen dog er af en sådan karakter, at det kræver et abstraktionsniveau hørende til det aktuelle matematikniveau (B- hhv. A-niveau).
En del af opgaverne i hver af de to delprøver indeholder tydeligt markerede spørgsmål, der er knyttet til afprøvning af mindstekravene på det aktuelle niveau (jf. afsnit 2.2). De markerede mindstekravsspørgsmål dækker tilsammen ca. 125% af det pointtal, der i det forelagte opgavesæt kræves for at opnå karakteren 02. Opgaverne involverer forskellige typer af mindstekravskategorier, der tilsammen beskriver det netop acceptable faglige niveau ved den aktuelle prøve i det forelagte opgavesæt.
Brug af formuleringer som 'løs ligningen', 'bestem nulpunkter' eller 'bestem skæringspunkter mellem to grafer' er ikke udtryk for, at der ønskes en bestemt fremgangsmåde. Hvis der er krav om en bestemt løsningsmetode, så vil det fremgå af opgaveformuleringen. I delprøve 1 begrænses svarmulighederne naturligt af, at elevernes eneste hjælpemiddel er en formelsamling. I delprøve 2 skelnes der mellem 'beregning' og 'aflæsning'. I delprøve 2 betyder en formulering som 'Bestem ved beregning…' eller 'Beregn…', at et korrekt svar skal baseres på en algebraisk beregning med et formeludtryk i kombination med en CAS-kommando (fx 'solve'), mens formuleringen 'Bestem ved aflæsning…' eller "Aflæs…" betyder, at et korrekt svar skal baseres på en præcis aflæsning med en dertil indbygget kommando på en grafisk eller en geometrisk repræsentation frembragt i et matematisk værktøjsprogram. I alle andre opgaver vil der være frit valg med hensyn til metode. Det er en del af undervisningen, at eleverne opnår indsigt i styrker og svagheder ved forskellige løsningsstrategier med og uden matematiske værktøjsprogrammer, herunder symbolske, numeriske og grafiske metoder til løsning af ligninger og andre matematiske problemer. Det forventes desuden, at eleverne opnår indsigt i, hvorledes man i opgaver, hvor det er relevant, kan argumentere ved hjælp af den afledede funktion. Formålet er, at eleverne bliver i stand til at vurdere hensigtsmæssigheden ved en given løsningsmetode samt at finde andre veje frem, hvis en bestemt løsningsstrategi slår fejl, fx i de tilfælde, hvor eksaminandens matematiske værktøjsprogram giver et uventet svar.

Det forventes, at eksaminanderne kan opstille modeller ved regression, men det forventes ikke, at de kan begrunde én bestemt model frem for andre.
Ordene 'skitse' og 'tegn' bruges forskelligt. Hvilke detaljer der bør medtages i en 'skitse', afhænger af det konkrete spørgsmål, og det er en del af undervisningen, at eleverne lærer at afkode, hvilke oplysninger der er nødvendige at medtage i den aktuelle situation. Når der bliver bedt om en tegning af en graf, et grafisk forløb eller en modeltegning af en geometrisk situation, så forventes eleverne at medtage de karakteristiske egenskaber ved de objekter, der indgår, herunder hensigtsmæssigt grafvindue og størrelsesforhold.
Når der i en opgave omhandlende geometrisk modellering indgår, at en geometrisk figur på passende vis skal indlægges (indtegnes) i et koordinatsystem, så skal de mål, der er oplyst, anvendes med en sådan præcision at koordinatsættene til relevante punkter i modellen kan aflæses og anvendes i de videre beregninger i relation til modellen.
Hvis der i en opgave stilles krav om, at en graf for en funktion skal tegnes i et bestemt udsnit af koordinatsystemet, så vil det ønskede grafvindue være angivet som et interval for hver af de variable eller på mængdeproduktform $[-10;10]\times[-10;10]$.
Et ekstremumspunkt angives som et punkt i det todimensionale koordinatsystem repræsenteret ved begge koordinater. Førstekoordinaten repræsenterer ekstremumsstedet (maksimums- eller minimumssted), mens andenkoordinaten repræsenterer funktionens ekstremum (maksimum eller minimum).
Der kan forekomme bilag til opgavesættet i form af regneark med data, som eksaminanderne forventes at kunne importere til videre bearbejdning i deres eget matematiske værktøjsprogram. Der anvendes som standard dansk decimalkomma (fx 1,53 og ikke 1.53), og det er en del af undervisningen, at eleverne lærer at importere data i forskellige formater.
I særlige tilfælde, hvor det danske komma vil give anledning til misforståelser, som fx ved angivelse af koordinater, vil der optræde decimalpunktum. Tilsvarende hvis en autentisk kilde el.lign. benytter decimalpunktum, så vil denne notation ikke blive ændret i gengivelsen i opgavesættet.
De vejledende opgavesæt og de stillede prøvesæt illustrerer dels omfang og opbygning af opgavesæt, dels hvorledes den konkrete udformning af forskellige spørgsmål kan være, herunder hvordan 'spor' hentet fra niveauets kernestof indgår i opgaver i anden delprøve ('spor' kan ikke forekomme i første delprøve). De stillede opgavesæt er dog ikke definerende for det pågældende niveau. Alle prøvesæt (inkl. de vejledende) findes på Materialeplatformen."

Bedømmelse af opgavebesvarelsen

I undervisningsvejledningens afsnit 4.3 beskrives, hvad der lægges vægt på i bedømmelsen:
"Vægtningen af hver af de to delprøver i det todelte centralt stillede opgavesæt svarer til forholdet mellem det samlede pointtal, der kan opnås, i hver af de to delprøver. I ekstreme tilfælde, hvor en eksaminand præsterer højt niveau i den ene delprøve og intet eller meget lavt niveau i den anden delprøve, vurderes, hvorvidt eksaminandens præstation på det foreliggende grundlag lever op til de faglige mål, hvor der indgår både færdigheder og kompetencer dels uden og dels med brug af et matematisk værktøjsprogram.
Vægtningen af de enkelte opgaver i hver af de to delprøver fremgår af opgavesættet. Hver opgave indeholder ét eller flere spørgsmål. Et spørgsmål kan indeholde delspørgsmål."
Et samlet opgavesæt indeholder spørgsmål, der samlet set summerer op til 250 point. Fordelingen af de 250 point mellem de to delprøver er 120 point i delprøve 1 og 130 point i delprøve 2. Af de vejledende opgavesæt fremgår det, at spørgsmålene indgår med forskellig vægt. Det enkelte spørgsmål tildeles enten 5 eller 10 point. Spørgsmål hørende til mindstekravene er fordelt mellem de to delprøver med ca. 45-50 point i delprøve 1 og ca. 50-55 point i delprøve 2.
Af undervisningsvejledningens afsnit 4.3 fremgår det endvidere om mindstekravene:
"En fuld besvarelse af ca. 80% af samtlige mindstekravsopgaver i et opgavesæt resulterer i karakteren 02. Besvarer eksaminanden yderligere andre opgaver i opgavesættet korrekt, tæller disse besvarelser positivt med frem mod en højere karakter. En eksaminand kan også opnå karakteren 02 ved korrekt besvarelse af tilfældigt udvalgte opgaver, der tilsammen indgår med samme vægt som ca. 80% af mindstekravsopgaverne i opgavesættet."
Af undervisningsvejledningens afsnit 4.3 fremgår det yderligere om helhedsvurdering:

"Bedømmelsen af eksaminandens samlede besvarelse af den skriftlige prøve tager udgangspunkt i en overordnet vurdering af besvarelsen som helhed, hvor der lægges særlig vægt på matematisk korrekthed, men også på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen.
Der lægges særlig vægt på, om eksaminanden:

- mestrer mindstekravene, dvs. de grundlæggende matematiske færdigheder og kompetencer med og uden matematiske værktøjsprogrammer.
- kan håndtere matematisk symbolsprog og operere med matematiske begreber.
- kan anvende matematisk teori og matematiske metoder til modellering og løsning af forelagte problemer.
- kan redegøre for forelagte matematiske modeller og diskutere deres rækkevidde og inddrage relevante usikkerhedsbetragtninger.
- kan præsentere en løsning af et matematisk problem på en klar og overskuelig måde.
- behersker matematiske værktøjsprogrammer til bearbejdning af forelagte matematiske problemer."

Kravene til helhedsindtrykket ved besvarelse af opgaver i delprøve 1 og delprøve 2 er lidt forskellige, idet fx angivelse af mellemregninger giver god mening i besvarelse af opgaver i delprøve 1, men sjældent i besvarelser af opgaver i delprøve 2 med brug af matematiske værktøjsprogrammer, hvor der i stedet er krav om, at eksaminanden dokumenterer sine matematiske overvejelser i brugen af programmets faciliteter. Til gengæld er der behov for forklaringer og henvisninger til diverse grafer og figurer i besvarelser af opgaver ved begge delprøver.
Ved bedømmelsen af helhedsindtrykket af besvarelse af de enkelte opgaver lægges særlig vægt på følgende fire punkter:

- *Redegørelse og dokumentation for metode*
  Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte løsningsstrategi med dokumentation i form af et passende antal mellemregninger eller matematiske forklaringer på metoden, når et matematisk værktøjsprogram anvendes.

- *Figurer, grafer og andre illustrationer*
  Besvarelsen skal indeholde hensigtsmæssig brug af figurer, grafer og andre illustrationer, og der skal være tydelige henvisninger til brug af disse i den forklarende tekst.

- *Notation og layout*
  Besvarelsen skal i overensstemmelse med god matematisk skik opstilles med hensigtsmæssig brug af symbolsprog. Hvis der anvendes matematisk notation, der ikke kan henføres til standardviden, skal der redegøres for betydningen.

- *Formidling og forklaring*
  Besvarelsen af rene matematikopgaver skal indeholde en angivelse af givne oplysninger og korte forklaringer knyttet til den anvendte løsningsstrategi beskrevet med brug af almindelig matematisk notation. Besvarelsen af opgaver, der omhandler matematiske modeller, skal indeholde en kort præsentationen af modellens kontekst, herunder betydning af modellens parametre. De enkelte delspørgsmål skal afsluttes med en præcis konklusion præsenteret i et klart sprog i relation til konteksten.

Specielt med henblik på kategorien formidling og forklaring bemærkes, at ordet "parametre" omfatter både de variable og konstanterne i en model. Formuleringer som "Indfør passende variable…" betyder, at eleven skal vælge variabelbetegnelser og forklare, hvad hver af de variable beskriver i den aktuelle kontekst. Formuleringer som "Gør rede for, hvad tallene fortæller om…" hentyder til, at eleverne skal forklare, hvad modellens konstanter betyder i den aktuelle kontekst. I modelleringsopgaver, hvor eleverne fx bliver bedt om at præsentere et punktplot, residualplot eller en graf, er der ikke krav om en konklusion.
I besvarelsesprocessen kan det være hensigtsmæssigt for nogle elever at kopiere opgaveformuleringer fra den digitale version af opgavesættet ind i besvarelsen, som typisk udfærdiges i et matematisk værktøjsprogram. Det anbefales dog, at eleverne uddrager den nødvendige information for besvarelse af opgaven (og derefter

eventuelt sletter udklippet), så det sikres, at opgavebesvarelsen fremstår som en helhed, og elevens tankegang fremgår klart."

Karakterfastsættelsen

Karakteren fastsættes på baggrund af den samlede bedømmelse, som altid en *vurdering af, i hvilket omfang eksaminandens præstation lever op til de relevante faglige mål*, som er angivet i læreplanens afsnit 2.1. Som nævnt ovenfor vurderes elevens besvarelse med henblik på de nævnte specifikke matematiske kompetencer, og i en karakterfastsættelse inddrages de *kategorier, der er relevante for pågældende prøvesæt*.

Når der *afgives karakterer*, er det vigtigt at kende karakterbekendtgørelsens bestemmelser og beskrivelser af de enkelte karakterer. Karakteren er ét tal og ikke en udtalelse, og karakterskalaen består kun af ganske få tal. Derfor vil den enkelte karakter altid rumme en vis kompleksitet. Som bilag til undervisningsvejledningen findes karakterbeskrivelser, der i skematisk form viser, hvorledes 7-trinsskalaens terminologi kan knyttes sammen med de faglige mål for skriftlig matematik på A-niveau.

Bodil Bruun, fagkonsulent, september 2019

Indhold

1. Tal, ligninger og formler

Delprøve 1

1.D1.1

a) Løs ligningen
$$x+2=\frac{4}{x-1}.$$

1.D1.2

a) Løs ligningen
$$1=\frac{x^2}{3x+4}.$$

1.D1.3

a) Løs ligningssystemet
$$y=x+2$$
$$x\cdot y-6\cdot x+3=0.$$

1.D1.4

a) Løs ligningssystemet
$$2x+3y=4x-1$$
$$-y+3\cdot x=2y.$$

1.D1.5

a) Løs ligningen $x^2-x-6=0$.

b) Reducér $\dfrac{x^2-x-6}{x+2}$.

1.D1.6

a) Løs ligningen $x^2-x-6=0$.

b) Løs ligningen $(x^2-x-6)\cdot(x+4)=0$.

1.D1.7

Et 5.gradspolynomium har forskriften
$$P(x)=(x^2+4x+5)\cdot(x^2-x-2)\cdot(x-3).$$

a) Argumentér for, at P har 3 rødder.

1.D1.8 Et 5.gradspolynomium med 5 rødder har forskriften

$$P(x)=(x^2+4x)\cdot(x^2-x-2)\cdot(x-3).$$

a) Bestem de 5 rødder.

1.D1.9 a) Bestem tallet k, så 4.gradspolynomiet P har netop én rod.

$$P(x)=(x^2+2x+2)\cdot(x^2-x+k).$$

1.D1.10 a) Reducér udtrykket

$$\frac{p\cdot(4p+2q)}{2p}.$$

1.D1.11 a) Reducér udtrykket

$$(x+2y)^2-(x-y)\cdot(x+2y).$$

1.D1.12 a) Reducér udtrykket

$$\frac{x^2+2x}{(x+2)\cdot(x-5)}.$$

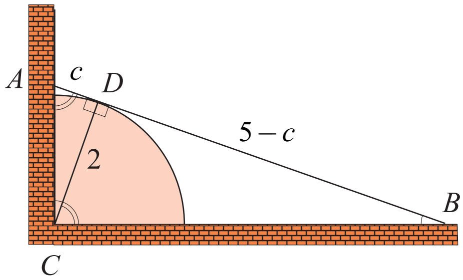
1.D1.13 a) Faktorisér i tæller og nævner og forkort brøken

$$\frac{x^2-4x-5}{x^2-5x}.$$

1.D1.14 a) Faktorisér i tæller og nævner og forkort brøken

$$\frac{4x^2+4x\cdot y+y^2}{4x^2-y^2}.$$

1.D1.15



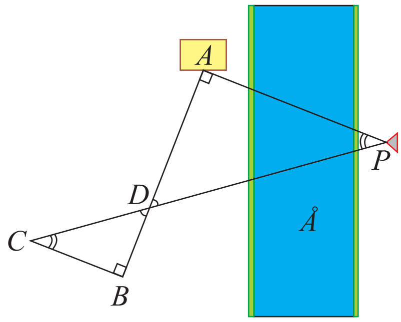
I et hushjørne ligger en udbygning, hvis grundplan har form som en kvartcirkel med radius 2m (se figur). En 5m lang stige placeres, så den rører de to vægge i punkterne A og B samtidig med, at den rører udbygningen i punktet D. Afstanden fra A til D betegnes c.

a) Gør rede for, at $\frac{2}{c} = \frac{5-c}{2}$.

b) Bestem de mulige værdier af c.

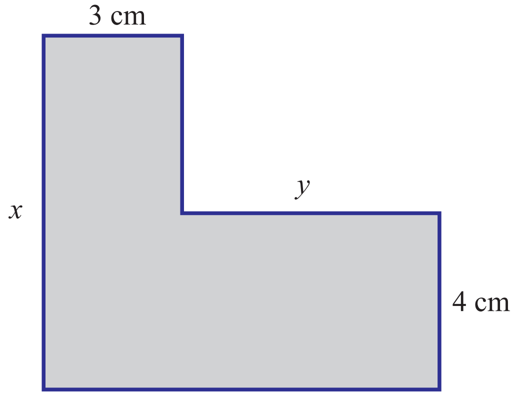
1.D1.16

Hr. Hansen kan tværs over åen fra sin hoveddør A se et udsigtstårn P (se figur).
For at bestemme, hvor langt der er fra hans hoveddør over til udsigtstårnet, foretager han en opmåling.
Først går han 900 m vinkelret på sigtelinjen fra A til P til punktet B. Fra B går han 400 m vinkelret på AB til punktet C. Fra C går han langs sigtelinjen fra C til P, indtil han krydser sin vej fra A til B, og her markerer han punktet D. Herefter måler han afstanden fra D til A, som er 600 m.



a) Hvor langt er der fra Hr. Hansens hoveddør i A til udsigtstårnet i P?

1.D1.17 En metalplade har form som vist på figuren, hvor nogle af metalpladens mål er angivet.



a) Bestem metalpladens omkreds udtrykt ved x og y.

b) Bestem x og y, når det oplyses, at metalpladens omkreds er 28 cm, og metalpladens areal er 38 cm^2.

1.D1.18 Et andengradspolynomium P er givet ved

$$P(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

Grafen for P er en parabel, der går gennem punkterne $A(0,1)$ og $B(5,36)$. Tangenten til parablen i punktet A har hældningskoefficienten -3.

a) Bestem tallene a, b og c.

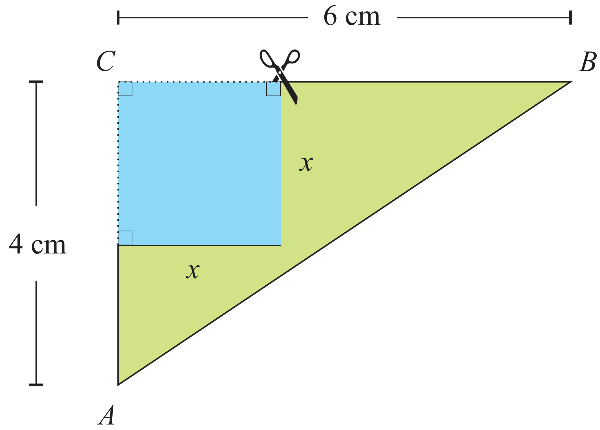
1.D1.19 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^2 + b \cdot x + c.$$

Det oplyses, at linjen med ligningen $y = -x + 5$ er tangent til grafen for f i punktet $P\left(1, f(1)\right)$.

a) Bestem b og c.

1.D1.20

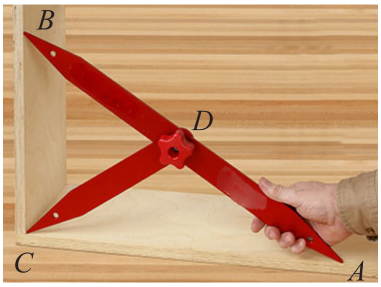


Et stykke papir har form som en retvinklet trekant ABC, hvor kateternes sidelængder er henholdsvis 4 cm og 6 cm. Ved trekantens retvinklede hjørne udklippes et kvadrat med sidelængden x, som vist på figuren.

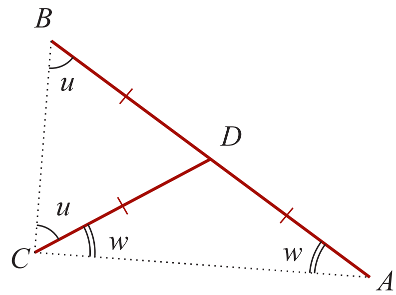
a) Bestem arealet af det tiloversblevne stykke papir udtrykt ved x.

b) Bestem den største sidelængde x, som kvadratet kan få ved et sådant udklip.

1.D1.21



Kilde: www.woodpeck.com



Når en snedker skal undersøge, om en vinkel er ret, så kan han benytte sig af et redskab som vist på billedet.

Figuren til højre viser en model af redskabet. Det oplyses, at punktet D ligger på linjestykket AB, og at $|AD| = |BD| = |CD|$.

a) Gør rede for, at vinkel C i trekant ABC er 90°.

2. Funktioner og differentialregning

Delprøve 1

2.D1.1 To funktioner *f* og *g* er givet ved

$$f(x) = \sin(\pi \cdot x + \frac{\pi}{2}) + 3 \text{ og } g(x) = x^2 + 2.$$

a) Bestem $g(f(2))$.

2.D1.2 To funktioner *f* og *g* er givet ved

$$f(x) = x^3 + 2x - 3 \text{ og } g(x) = \sqrt{x} + 2, \quad x \geq 0.$$

a) Bestem $g(f(2))$.

2.D1.3 To funktioner *f* og *g* er givet ved

$$f(x) = 3 \cdot 2^x \text{ og } g(x) = \sqrt{x-4}, \quad x \geq 4.$$

a) Bestem $f(g(x))$ og $g(f(x))$.

2.D1.4 To funktioner *f* og *g* er givet ved

$$f(x) = x^2 + 3 \text{ og } g(x) = \sqrt{x-3}, \quad x \geq 3.$$

a) Bestem $f(g(x))$ og $g(f(x))$, og kommentér resultatet.

2.D1.5 To funktioner *f* og *g* er bestemt ved

$$g(x) = x^2 - 1$$
$$f(x) = x + 1.$$

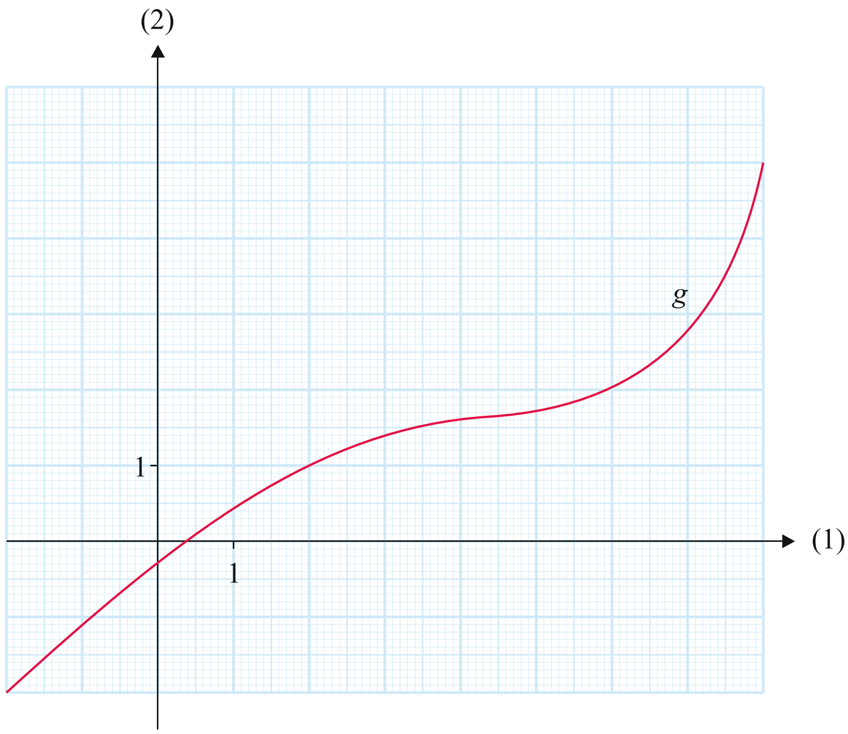
a) Løs ligningen $g(f(x)) = 0$.

2.D1.6 To funktioner *f* og *g* er bestemt ved

$$g(x) = \sqrt{x} + 1$$
$$f(x) = x^2 - 4x + 4.$$

Løs ligningen $g(f(x)) = 1$.

2.D1.7



Figuren viser grafen for en voksende funktion *g*.

a) Bestem funktionsværdien for den omvendte funktion til *g*, når $x = 1$, dvs. $g^{-1}(1)$.

En anden funktion *f* er bestemt ved

$$f(x) = x^2 - 5x + 8.$$

b) Løs ligningen $g(f(x)) = 1$.

2.D1.8 En funktion *f* er givet ved

$$f(x) = 3x + 6.$$

a) Bestem en forskrift for den omvendte funktion til *f*, dvs. $f^{-1}(x)$.

2.D1.9

To funktioner *f* og *g* er bestemt ved

$$f(x) = 2x + 5 \quad \text{og} \quad g(x) = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{5}{2}.$$

a) Bestem $f(g(x))$, og forklar hvad resultatet fortæller om de to funktioner.

2.D1.10

To funktioner *f* og *g* er bestemt ved

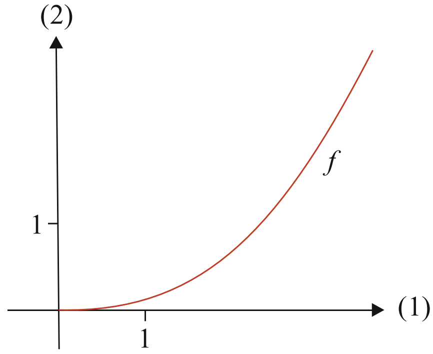
$$f(x) = \sqrt{x+2} \quad \text{og} \quad g(x) = x^2 - 2\,, \quad x > 0.$$

a) Gør rede for, at *g* er den omvendte funktion til *f*, dvs. $f^{-1}(x) = g(x)$.

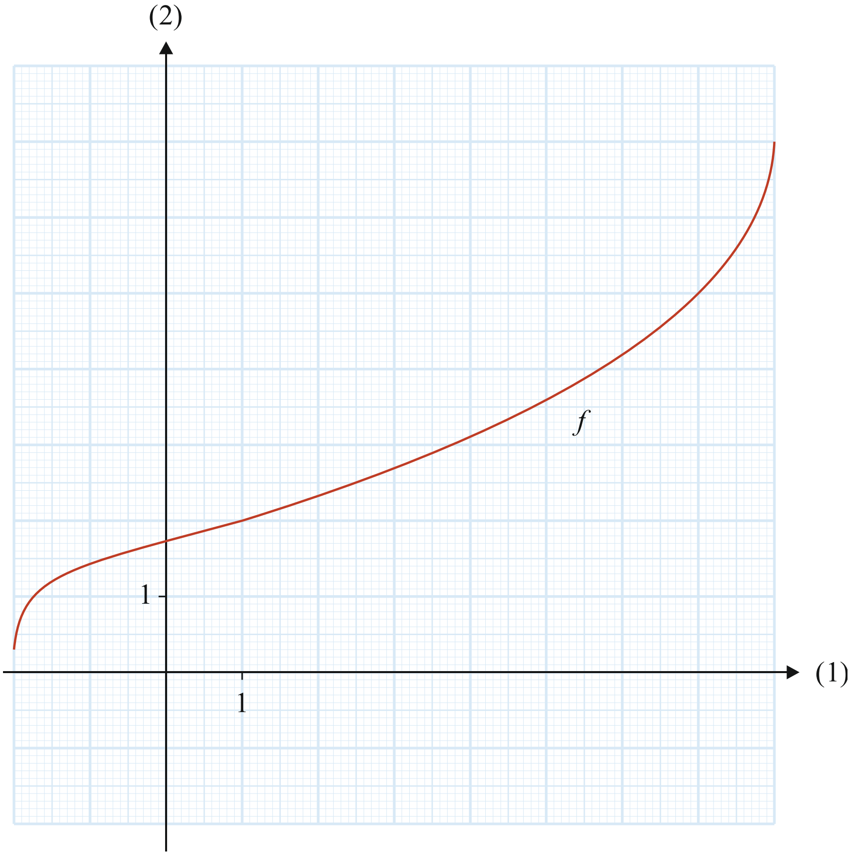
2.D1.11

På figuren ses grafen for en funktion *f*.

a) Skitsér grafen for den omvendte funktion til *f*, dvs. f^{-1}.



2.D1.12



På figuren ses grafen for en funktion f, der er defineret i $[-2,8]$.

a) Bestem $f^{-1}(5)$.

b) Løs ligningen $f^{-1}(x) = 1$.

2.D1.13 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \tfrac{1}{3} \cdot e^{x^3 - 12x}$$

a) Løs $f'(x) = 0$.

2.D1.14 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^2 \cdot \cos(x) \ , \ 0 \leq x \leq 2 \cdot \pi.$$

a) Bestem $f'(\pi)$.

2.D1.15 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (x^3 - x^2) \cdot e^{x-4}.$$

a) Bestem $f'(x)$.

b) Løs ligningen $f'(x) = 0$.

2.D1.16 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x \cdot \ln(x) - x, \ x > 0.$$

a) Bestem $f'(x)$.

b) Løs ligningen $f'(x) = 0$.

2.D1.17 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 7x + 8 + \cos(x).$$

a) Argumentér for, at f er voksende.

2.D1.18 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2x + 1 + k \cdot \sin(x),$$

hvor k er en konstant.

a) Bestem k, så f er voksende.

2.D1.19 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (x+1) \cdot e^{x^2 + x}.$$

a) Bestem $f'(x)$.

b) Løs ligningen $f'(x) = 0$.

2.D1.20

En funktion f er givet ved

$$f(x) = (x^3 + 3x) \cdot e^{2x}$$

a) Bestem $f(0)$.

b) Bestem $f'(x)$.

c) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$.

2.D1.21

Den afledede funktion f' til en funktion f er bestemt ved

$$f'(x) = x^2 - 10x + 16.$$

a) Bestem monotoniforholdene for f.

2.D1.22

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^2.$$

a) Bestem førstekoordinaten til hvert af røringspunkterne for de to tangenter til grafen for f, der går igennem punktet $P(1, -3)$.

2.D1.23

En differentiabel funktion f opfylder, at

$$f(1) = 4$$

og at fortegn og nulpunkter for f' er som givet på fortegnslinjen:

x		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$

a) Gør rede for, at ligningen $f(x) = 2$ ikke har en løsning.

2.D1.24

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \ln(x^2 + 1).$$

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$.

2.D1.25 En funktion *f* er bestemt ved

$$f(x) = x^3 + k \cdot x^2 + 3x + 1,$$

hvor *k* er en konstant.

a) Bestem de værdier af *k*, så *f* er en voksende funktion.

2.D1.26 En funktion *f* er bestemt ved

$$f(x) = x^3 + k \cdot x^2 + 3x + 1,$$

hvor *k* er en konstant.

a) Bestem de værdier af *k*, så ligningen $f(x) = a$ har netop én løsning for alle værdier af tallet *a*.

2.D1.27 En funktion *f* er bestemt ved

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot \sin(x)\ .$$

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet $P(0, f(0))$.

2.D1.28 En funktion *f* er bestemt ved

$$f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x}\ .$$

Om et andengradspolynomium $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ oplyses, at

$$\begin{aligned} p(0) &= f(0) \\ p'(0) &= f'(0) \\ p''(0) &= f''(0), \end{aligned}$$

hvor p'' er den anden afledede af *p*.

a) Bestem tallene *a*, *b* og *c*.

2.D1.29 En funktion *f* er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}\ .$$

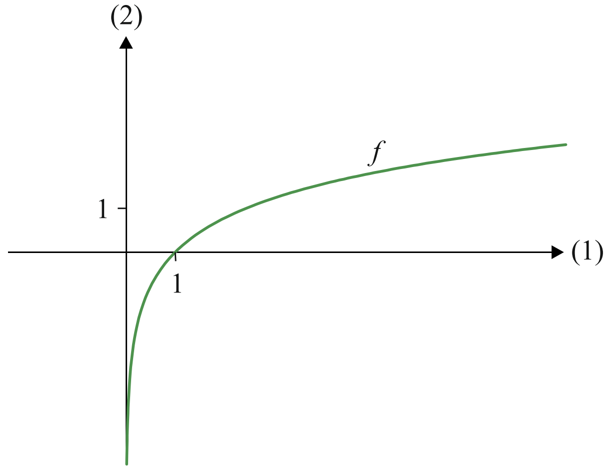
a) Gør rede for, at ligningen $f(x) = 1$ ikke har en løsning.

2.D1.30

På figuren ses grafen for en funktion f. Funktionerne g og h er bestemt ved

$$g(x) = f(x+2)$$
$$h(x) = f(x) + 2.$$

a) Skitsér graferne for funktionerne f, g og h i samme koordinatsystem.

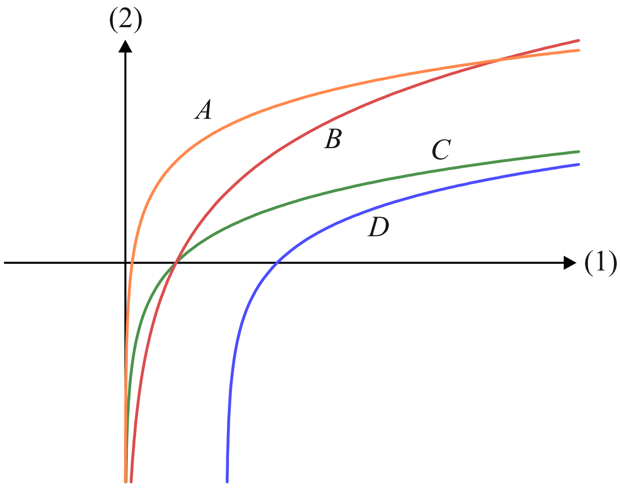


2.D1.31

På figuren ses graferne for hver af de fire funktioner

$$f(x) = \ln(x)$$
$$g(x) = 2 \cdot \ln(x)$$
$$h(x) = \ln(x-2)$$
$$k(x) = \ln(x) + 2.$$

a) Gør for hver af graferne A, B, C og D rede for, hvilken af funktionerne f, g, h og k den er graf for.

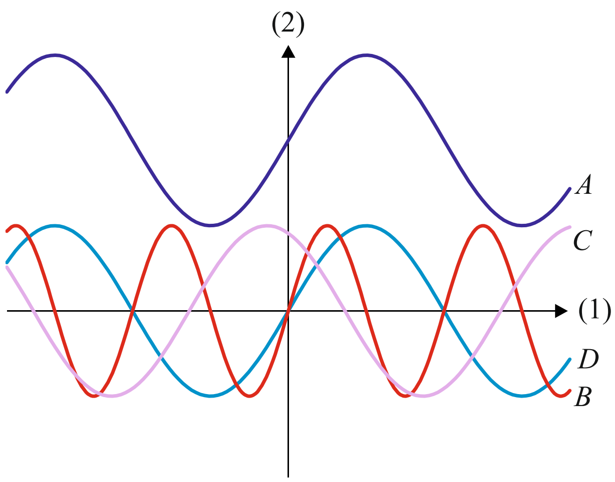


2.D1.32

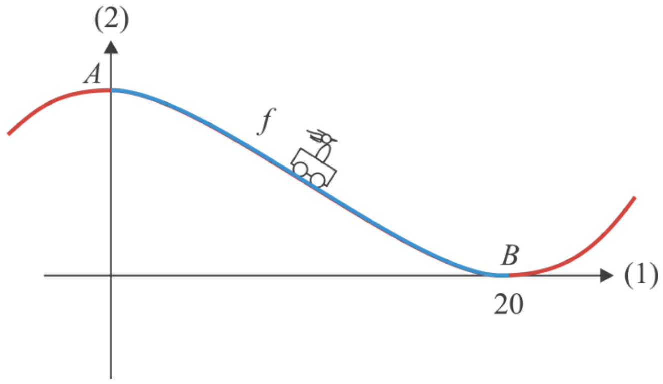
På figuren ses graferne for fire funktioner

$$f(x) = \sin(x)$$
$$g(x) = 2 + \sin(x)$$
$$h(x) = \sin(2 \cdot x)$$
$$k(x) = \sin(x+2).$$

a) Gør for hver af graferne A, B, C og D rede for, hvilken af funktionerne f, g, h og k den er graf for.



2.D1.33



En funktion f er bestemt ved

$$f(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+10.$$

Ved design af en rutsjebane skal en del af rutsjebanen have form som den del af grafen for f, der ligger mellem punkterne A og B.
Rutsjebanen skal være vandret i punkterne A og B. Desuden skal rutsjebanen røre jorden i punktet B.

a) Bestem a, b og c.

2.D1.34 En funktion f er bestemt ved

$$f(x)=x^2-4x+6.$$

Det oplyses, at krumningen til grafen for f i punktet $P(x_0, f(x_0))$ er givet ved

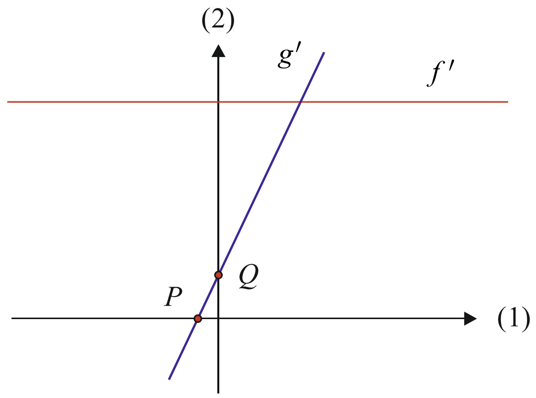
$$K(x_0)=\frac{f''(x_0)}{\left(1+(f'(x_0))^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

hvor $f''(x)$ er den anden afledede til $f(x)$.

a) Bestem krumningen $K(2)$ til grafen for f i punktet $P(2, f(2))$.

2.D1.35

Figuren viser graferne for de afledede funktioner f' og g'.



Det oplyses, at $f'(x)=5$ samt at g' er en lineær funktion, hvis graf går gennem punkterne $P\left(-\frac{1}{2},0\right)$ og $Q(0,1)$.

a) Bestem monotoniforholdene for funktionen g.

b) Bestem førstekoordinaten til det punkt R, hvor tangenthældningen til grafen for f er den samme som tangenthældningen til grafen for g.

2.D1.36

En funktion f er bestemt ved

$$f(x)=x^3-3\cdot x^2-5\cdot x+c,$$

hvor c er en konstant.

Linjen l er bestemt ved ligningen $y=4\cdot x+6$.

Det oplyses, at der er netop to værdier af konstanten c, for hvilke linjen l er tangent til grafen for f.

a) Bestem de to værdier af c.

Delprøve 2

2.D2.1 En funktion f er givet ved

$$f(x)=\sqrt{x},\ \ x\geq 0.$$

a) Bestem kurvelængden L af grafen for f fra punktet $A(2,f(2))$ til punktet $B(10,f(10))$.

2.D2.2 En funktion f er givet ved

$$f(x)=x^2+4x+1.$$

a) Bestem det positive tal k, så kurvelængden L af grafen for f fra punktet $A(-1,f(-1))$ til punktet $B(k,f(k))$ er 35.

2.D2.3 En funktion f er givet ved

$$f(x)=(x+5)\cdot(x-1)\cdot(x-10)\cdot(x-15).$$

a) Bestem $f'(x)$, og benyt denne til at bestemme monotoniforholdene for f.

b) Bestem en ligning for de tangenter til grafen for f, som går igennem punktet $(-3,10)$.

2.D2.4 En funktion f er givet ved

$$f(x)=\sqrt{-(x+3)\cdot(x-7)}\ .$$

a) Bestem $\mathrm{Dm}(f)$, og tegn grafen for f.

b) Bestem $f'(x)$, og bestem monotoniforholdene for f.

c) Bestem en ligning for tangenten til grafen i punktet $P(1,f(1))$.

2.D2.5 En funktion f er givet ved

$$f(x)=(x+6)\cdot(x-2)\cdot(x-8).$$

a) Benyt $f'(x)$ til at bestemme monotoniforholdene for f.

b) Bestem en ligning for de tangenter til grafen for f, der har en hældningskoefficient på 4.

c) Bestem en ligning for den tangent til grafen for f, som går igennem punktet $(-3,10)$.

2.D2.6

Foto: colourbox

Antallet af rygere på verdensplan steg fra 721 mio. rygere i 1980 til 967 mio. rygere i 2012.

I en model antages det, at antallet af rygere på verdensplan er vokset eksponentielt efter 1980.

a) Indfør passende variable, og opskriv et matematisk udtryk, der beskriver udviklingen i antallet af rygere på verdensplan efter 1980.

Verdens befolkningstal kan i modellen beskrives ved:

$$N(t) = \frac{12245}{1 + 1{,}74 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}0273 \cdot t}} \ ,$$

hvor $N(t)$ betegner verdens befolkningstal (målt i mio.) til tidspunktet t (målt i år efter 1980).

b) Benyt modellen til at bestemme en forskrift for en funktion g, som angiver andelen af rygere på verdensplan til tiden t (målt i år efter 1980).

c) Bestem det årstal, hvor andelen af rygere på verdensplan er mindst.

Kilde: Politiken.

3. Integralregning

Delprøve 1

3.D1.1 a) Bestem integralet

$$\int (3x^2 + 2x + 1)\,dx.$$

3.D1.2 a) Bestem integralet

$$\int (2x + e^x)\,dx.$$

3.D1.3 a) Bestem integralet

$$\int (5x^4 + \frac{1}{x})\,dx.$$

3.D1.4 a) Bestem integralet

$$\int (\sin(x) + x)\,dx.$$

3.D1.5 a) Bestem integralet

$$\int (2x + e^{3x})\,dx.$$

3.D1.6 a) Bestem integralet

$$\int 2x \cdot (x^2 + 1)^5\,dx.$$

3.D1.7 a) Bestem integralet

$$\int 5x^4 \cdot e^{x^5+3}\,dx.$$

3.D1.8 a) Bestem integralet

$$\int (\ln(x) + x^2)\, dx.$$

3.D1.9 a) Bestem integralet

$$\int \sin(2x+4)\, dx.$$

3.D1.10 a) Bestem integralet

$$\int 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot (\ln(x))^2\, dx.$$

3.D1.11 a) Bestem integralet

$$\int \frac{2x}{x^2+3} dx.$$

3.D1.12 a) Bestem integralet

$$\int_0^2 (3x^2 - 10x)\, dx.$$

3.D1.13 a) Bestem integralet

$$\int_0^1 (8x^3 + \mathrm{e}^x)\, dx,$$

og giv en geometrisk fortolkning af resultatet.

3.D1.14 a) Bestem integralet

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\ \mathrm{d}x.$$

3.D1.15 a) Bestem integralet

$$\int_2^3 \frac{3x^2}{x^3-7}\ \mathrm{d}x.$$

3.D1.16

a) Bestem integralet

$$\int_0^2 \frac{3x^2+2}{\sqrt{x^3+2x+4}}\,dx.$$

3.D1.17

En funktion f er bestemt ved

$$f(x)=2x+\frac{1}{x},\quad x>0.$$

a) Bestem den stamfunktion til f, hvis graf går gennem punktet $P(1,3)$.

3.D1.18

En funktion f er givet ved

$$f(x)=\frac{5}{x}+2x\,,\quad x>0\,.$$

a) Redegør for, hvilken af de tre funktioner

$$g(x)=\frac{-5}{x^2}+2$$
$$h(x)=5\ln(x)+x^2$$
$$k(x)=\ln(5x)+x^2$$

der er en stamfunktion til f.

3.D1.19

To funktioner f og g er givet ved

$$f(x)=(2x+1)\cdot\ln(x),\quad x>0$$
$$g(x)=\frac{1}{x}+2\cdot\ln(x),\quad x>0.$$

a) Undersøg, om f er en stamfunktion til g.

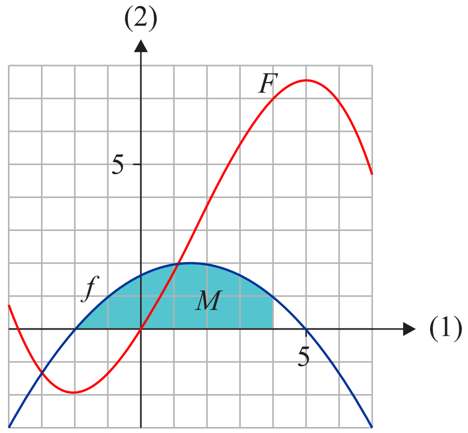
3.D1.20

To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x)=x+5+\frac{1}{x}$$
$$g(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2+\ln x+4x+3.$$

a) Undersøg, om g er netop den stamfunktion til f, hvis graf går gennem punktet $P(1,9)$.

3.D1.21



Figuren viser graferne for f og F, hvor F er en stamfunktion til f.

a) Bestem $F'(-1)$.

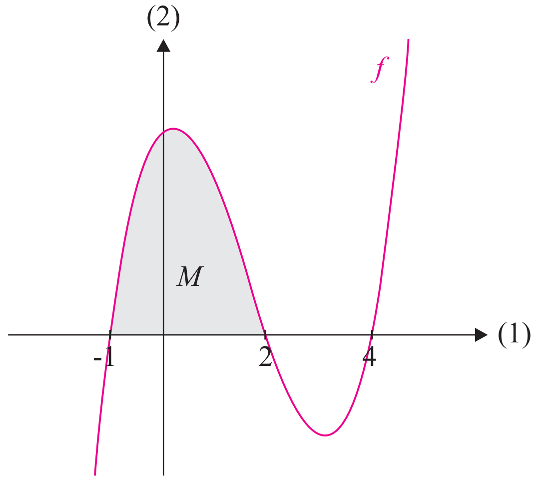
Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen og linjen med ligningen $x = 4$ en punktmængde M, der har et areal.

b) Bestem arealet af M.

3.D1.22

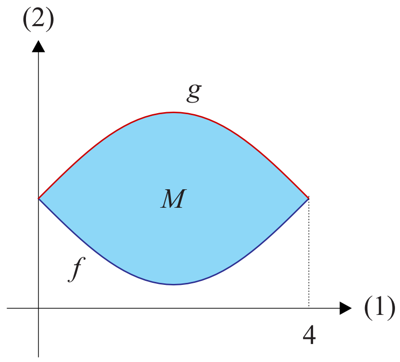
På figuren ses grafen for en funktion f. Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen i intervallet $[-1;2]$ en punktmængde M, der har et areal.

Det oplyses, at $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = 5$, og at $\int_{2}^{4} f(x)\,dx = -2{,}6$.



a) Bestem arealet af M.

3.D1.23 Figuren viser en punktmængde M, der er afgrænset af graferne for funktionerne f og g.



Det oplyses, at $f(0)=g(0)$ og $f(4)=g(4)$. Om to stamfunktioner F og G til henholdsvis f og g oplyses følgende funktionsværdier:

x	0	4
$F(x)$	1	3
$G(x)$	-1	5

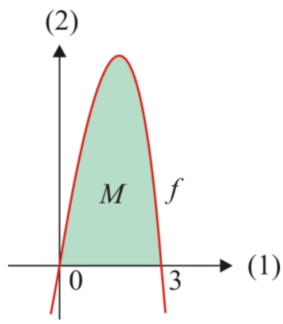
a) Bestem arealet af M.

3.D1.24 En funktion f er bestemt ved

$$f(x)=-x^3+9x.$$

Grafen for f og koordinatsystemets førsteakse afgrænser i første kvadrant en punktmængde M.

a) Bestem arealet af M.



3.D1.25 To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x)=3x^2$$
$$g(x)=-3x^2+24.$$

a) Bestem førstekoordinaten til hvert af skæringspunkterne mellem grafen for f og grafen for g.

De to grafer afgrænser i første og anden kvadrant en punktmængde M, der har et areal.

b) Skitsér området M.

c) Bestem arealet af M.

3.D1.26 En funktion f har forskriften

$$f(x) = -x^3 + 3x^2\,.$$

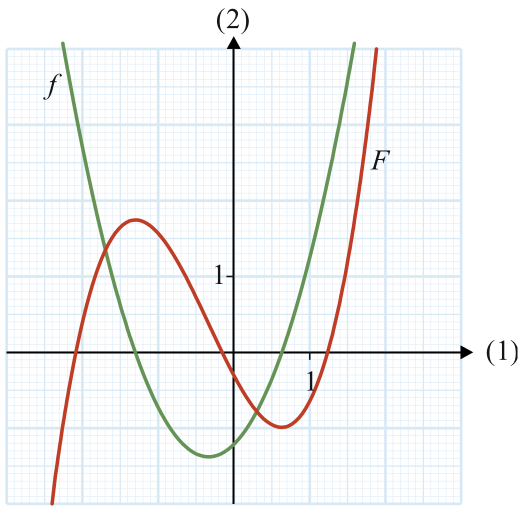
a) Gør rede for, at $x = 0$ og $x = 3$ er de eneste løsninger til ligningen $f(x) = 0$.

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen i første kvadrant en punktmængde M, der har et areal.

b) Skitsér punktmængden M.

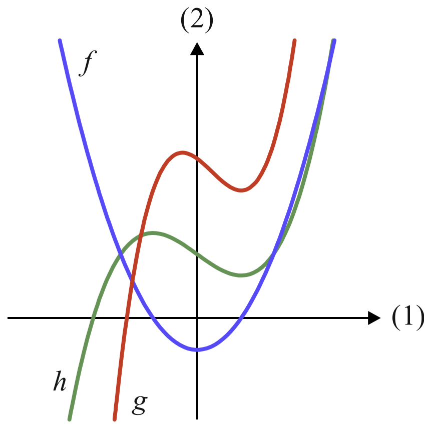
c) Bestem arealet af M.

3.D1.27 Figuren viser grafen for en funktion f og en tilhørende stamfunktion F.



a) Skitsér grafen for den stamfunktion til f, hvis graf går gennem punktet $P(1, 2)$.

3.D1.28 Figuren viser grafen for 3 funktioner f, g, og h.



Det oplyses at enten g eller h er stamfunktion til f.

a) Argumentér for, hvilken af funktionerne g eller h der er stamfunktion til f.

3.D1.29 En funktion F er givet ved

$$F(x) = x^3 + x^2 - 3x.$$

Det oplyses, at F er en stamfunktion til f.

a) Bestem den stamfunktion til f, hvis graf går gennem punktet $P(2,8)$.

Delprøve 2

3.D2.1 To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x)=x+5+\frac{1}{x}$$

$$g(x)=\frac{1}{2}\cdot(x+1)^2+\ln(x)+4x+3.$$

a) Undersøg, om g er netop den stamfunktion til f, hvis graf går gennem punktet $P(1,9)$.

3.D2.2 En funktion f er bestemt ved

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+1}.$$

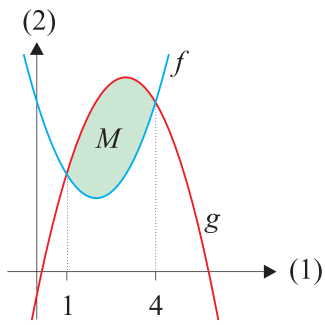
a) Bestem den stamfunktion til f, hvis graf går gennem $P(0,8)$.

3.D2.3 To funktioner f og g er givet ved

$$f(x)=x^2-4x+7$$

$$g(x)=-x^2+6x-1.$$

Graferne for f og g afgrænser i første kvadrant en punktmængde M, der har et areal.



a) Bestem arealet af M.

b) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes $360°$ om koordinatsystemets førsteakse.

3.D2.4 En funktion f er bestemt ved

$$f(x)=(x+1)\cdot e^{-x}.$$

Grafen for f afgrænser sammen med koordinatsystemets akser i anden kvadrant en punktmængde M, der har et areal.

a) Bestem arealet af M.

b) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen.

3.D2.5 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x.$$

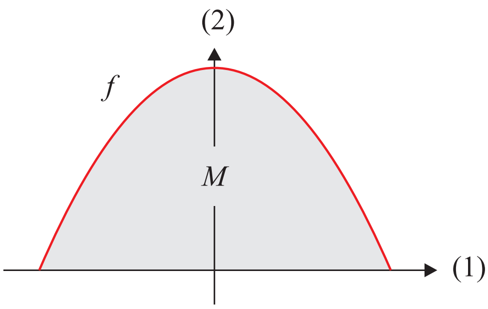
Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen to punktmængder, der hver har et areal.

a) Tegn grafen for f.

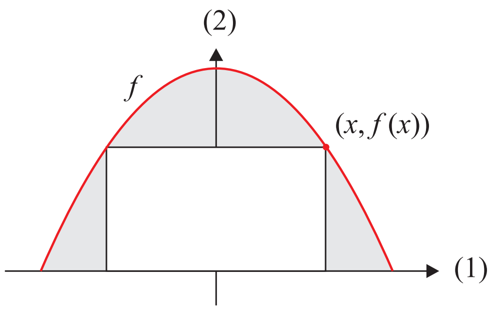
b) Bestem det samlede areal af de to punktmængder.

c) Bestem det samlede volumen af de to omdrejningslegemer, der fremkommer, når de to punktmængder drejes $360°$ om førsteaksen.

3.D2.6



Figur 1



Figur 2

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 4 - \frac{x^2}{4}.$$

Grafen for f og førsteaksen afgrænser i første og anden kvadrant en punktmængde M, der har et areal (se figur 1).

a) Bestem arealet af M.

Fra punktmængden M er der udskåret et rektangel (se figur 2).

b) Bestem arealet af det skraverede område på figur 2 udtrykt ved x.

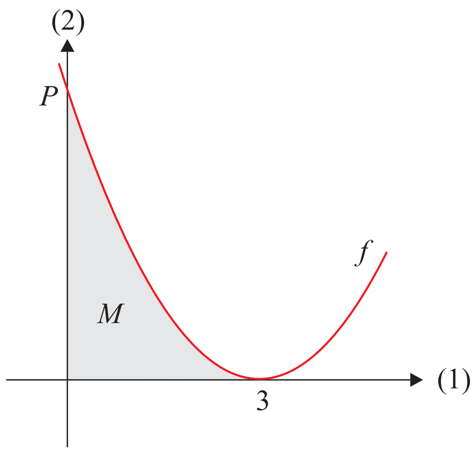
3.D2.7 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^2 - 6x + 9.$$

Grafen for f og koordinatsystemets akser afgrænser i første kvadrant en punktmængde M, der har et areal.

a) Bestem arealet af M.

b) Bestem en ligning for tangenten t til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$.



Tangenten t til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$ deler punktmængden M i to punktmængder.

b) Bestem arealet af hver af disse.

3.D2.8 To funktioner g og h er givet ved

$$g(x) = 4 \cdot (1 - e^{-x}) \quad \text{og} \quad h(x) = e^x - 1.$$

Graferne for g og h afgrænser i første kvadrant en punktmængde M, der har et areal.

a) Bestem arealet af M.

b) Gør rede for, at stamfunktionen til g er voksende i $[0;\infty[$.

3.D2.9 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 3x + \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

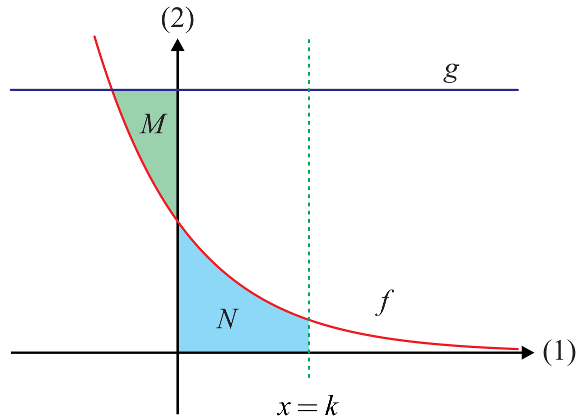
Grafen for f og linjen med ligningen $y = 4$ afgrænser i første kvadrant en punktmængde M, der har et areal.

a) Bestem ved beregning arealet af M.

b) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen.

3.D2.10 To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = 2 \cdot 0{,}5^x$$
$$g(x) = 4.$$



Graferne for f og g afgrænser sammen med koordinatsystemets andenakse i anden kvadrant en punktmængde M, der har et areal.

a) Bestem arealet af M.

For $k > 0$ afgrænser grafen for f sammen med koordinatakserne og linjen med ligningen $x = k$ i første kvadrant en punktmængde N, der har et areal.

b) Bestem k, så arealet af N er 2.

3.D2.11 En funktion f er givet ved

$$f(x) = -x^2 + 4x\,.$$

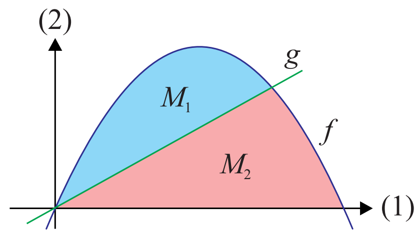
Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen i første kvadrant et område M, der har et areal.

a) Bestem arealet af M.

En anden funktion g er givet ved

$$g(x) = k \cdot x,$$

hvor $0 < k < 4$ er en konstant.



Grafen for g opdeler området M i to delområder M_1 og M_2.

b) Bestem k, så arealerne af M_1 og M_2 er lige store.

3.D2.12 To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = x^2 - k \cdot x \quad \text{og} \quad g(x) = k \cdot x,$$

hvor k er et positivt tal.

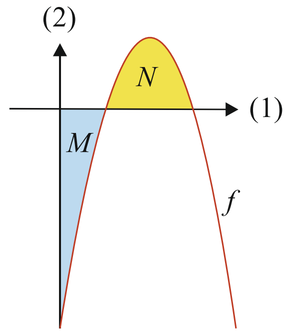
Graferne for f og g afgrænser en punktmængde M, der har et areal.

a) Bestem skæringspunkterne mellem graferne for f og g udtrykt ved k.

b) Bestem k, så arealet af M er 36.

3.D2.13 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (1-x)(x-a), \quad a > 1.$$



a) Bestem førstekoordinaten til hvert af skæringspunkterne mellem grafen for f og førsteaksen.

Grafen for f afgrænser sammen med koordinatakserne i fjerde kvadrant en punktmængde M, der har et areal. Ligeledes afgrænser grafen for f sammen med førsteaksen i første kvadrant en punktmængde N, der har et areal.

b) Bestem arealet af M udtrykt ved a.

c) Bestem tallet a, så arealerne af M og N bliver lige store.

3.D2.14 En funktion f er givet ved

$$f(x) = a \cdot x + b.$$

Det oplyses, at $\int_0^2 f(x)dx = 10$ og $\int_0^4 f(x)dx = 25$.

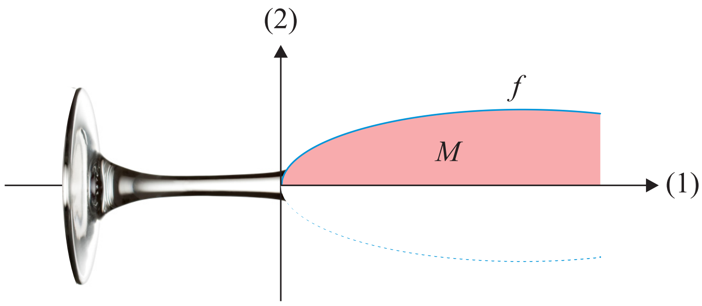
a) Bestem værdierne for konstanterne a og b.

3.D2.15 En funktion *f* er bestemt ved

$$f(x) = a \cdot \sqrt{x \cdot (16 - x)},\ \ 0 \leq x \leq 10,$$

hvor *a* er et positivt tal.

Grafen for *f* afgrænser sammen med koordinatsystemets førsteakse og linjen med ligningen $x = 10$ et område *M*, der har et areal. Enheden på begge akser er cm.



Det indre af et glas har form som det omdrejningslegeme, der fremkommer, når *M* drejes $360°$ om førsteaksen.

a) Bestem *a*, så glassets volumen bliver 260 cm^3.

For et andet glas er $a = 0{,}3$. En markering på glasset skal vise, hvornår der er hældt 100 cm^3 i glasset, når glasset står lodret.

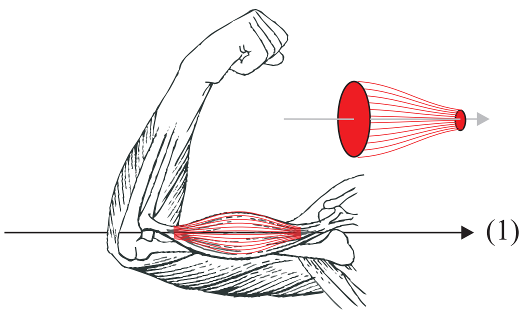
b) Bestem, hvor markeringen på glasset skal anbringes.

3.D2.16 En funktion *f* er givet ved

$$f(x) = 2 \cdot \sin(0{,}05 \cdot \pi \cdot x - 0{,}5 \cdot \pi) + 2\,.$$

a) Tegn grafen for f i intervallet $[0;40]$.

I en model kan bicepsmusklen hos en bestemt person beskrives ved det omdrejningslegeme, der fremkommer, når grafen for f drejes $360°$ omkring førsteaksen i intervallet $[0;40]$.



b) Bestem bicepsmusklens volumen.

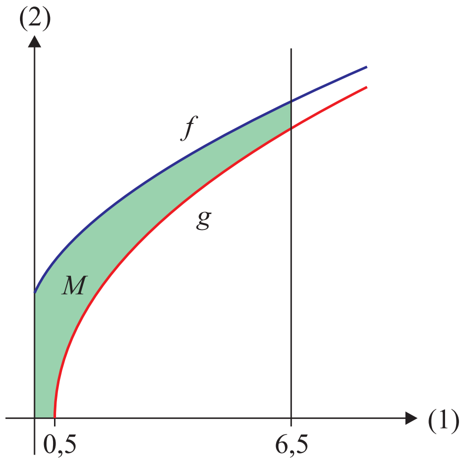
Styrken i bicepsmusklen er proportional med musklens maksimale tværsnitsareal.

c) Bestem bicepsmusklens maksimale tværsnitsareal.

3.D2.17 To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = 2{,}5 \cdot \sqrt{x+0{,}05} + 1{,}4\,, \quad x \geq 0$$
$$g(x) = 3 \cdot \sqrt{x-0{,}5}\,, \quad x \geq 0{,}5$$

I første kvadrant afgrænser graferne for f og g sammen med koordinatakserne og linjen med ligningen $x = 6{,}5$ en punktmængde M, der har et areal.



En keramikskål, der er 6,5 cm høj, kan i en model beskrives ved det omdrejningslegeme, der fremkommer ved at dreje M 360° om førsteaksen. I modellen har begge akser enheden cm.

a) Benyt modellen til at bestemme, hvor meget skålen kan rumme.

b) Benyt modellen til at bestemme volumen af den ler, skålen er lavet af.

3.D2.18

To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = -0{,}15x^2 + 2{,}205x - 0{,}858$$
$$g(x) = -0{,}12x^2 + 1{,}3x + 4{,}2$$

Graferne for f og g afgrænser sammen med koordinatsystemets akser i første kvadrant et område M, hvor $g(x) \geq f(x)$.

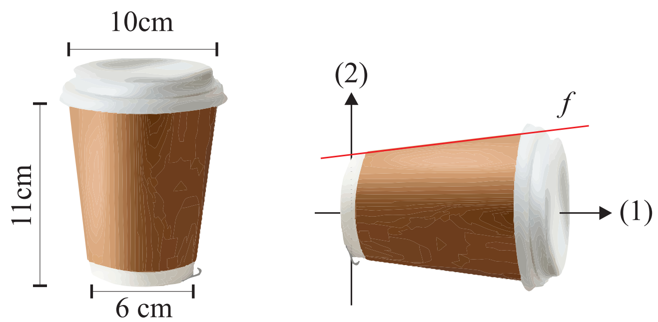
En træskål har form som det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M roteres 360° om førsteaksen. Enheden på begge akser er cm.

a) Tegn graferne for f og g.

b) Bestem skålens højde.

c) Bestem rumfanget af det træ, der udgør skålen.

3.D2.19 I en model har det indre af kaffebægeret på figuren form som en keglestub. Bægeret har en indre radius på 3 cm i bunden og en indre radius på 5 cm i toppen. Bægeret er 11 cm dybt.



På figuren til højre er en model af bægeret indtegnet i et koordinatsystem med enheden cm på begge akser. I modellen er bægerets indre overside begrænset af den rette linje, der er graf for den lineære funktion f.

a) Bestem en forskrift for f.

Der hældes kaffe i det lodretstående bæger, så væskeoverfladen er 8 cm fra bunden.

b) Benyt modellen til at bestemme volumenet af kaffe i bægeret.

3.D2.20 I en model for glukoseindholdet i blodbanen hos en person betegner $g(t)$ mængden af glukose (målt i mg), der er absorberet fra mave/tarmsystemet *t* timer efter indtagelsen af glukosen. Det oplyses, at

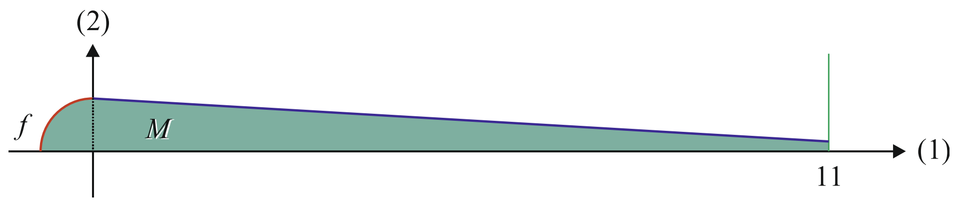
$$g'(t) = 675000 \cdot t \cdot e^{-3t}, \quad 0 \leq t \leq 4.$$

a) Benyt et integral til at bestemme hvor meget glukose, der ifølge modellen er absorberet fra mave/tarmsystemet 4 timer efter indtagelse af glukosen.

3.D2.21 Funktionen *f* er givet ved

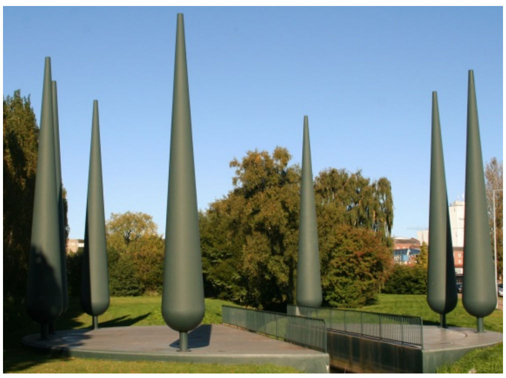
$$f(x) = \begin{cases} 0,25 \cdot \sqrt{9 - 16x^2} & -0,75 \leq x < 0 \\ -0,055x + 0,75 & 0 \leq x \leq 11. \end{cases}$$

Grafen for *f* afgrænser sammen med koordinatsystemets førsteakse og linjen med ligningen $x = 11$ i første og anden kvadrant et område *M*, der har et areal.



a) Bestem arealet af *M*.

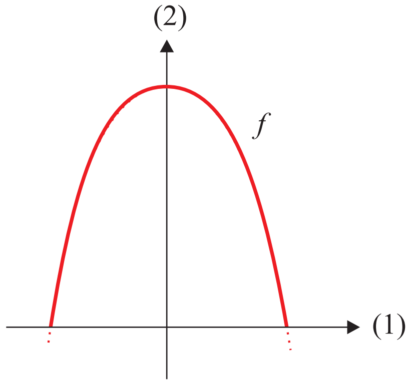
En skulptur har samme form som det omdrejningslegeme, der fremkommer, når *M* drejes 360° om førsteaksen. Enheden på koordinatsystemets akser er meter.



b) Bestem skulpturens rumfang.

3.D2.22 I St. Louis, Missouri, står Eero Saarinen's "The Gateway Arch" (se foto), som blev bygget i perioden 1963-65.

Foto: wikimedia.org(David K. Staub)



I en model, hvor alle enheder er målt i meter, følger buen den positive del af grafen for funktionen

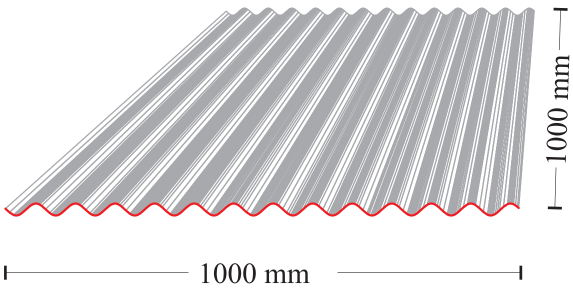
$$f(x) = 211{,}4885 - 10{,}4801 \cdot (e^{0{,}0329x} + e^{-0{,}0329x}) .$$

a) Benyt modellen til at bestemme buens bredde ved jordoverfladen.

b) Benyt modellen til at bestemme buens længde.

Kilde: Gateway to Mathematics Equations of the St. Louis Arch, Paul Calter, Nexus Network Journal, Springer, 2006.

3.D2.23



En funktion f er givet ved

$$f(x) = -9{,}75 \cdot \sin(0{,}0817 \cdot x) \text{, hvor } 0 \le x \le 1000 .$$

I en model har den ene kant på en tagplade samme form som grafen for f. Alle mål er i mm.

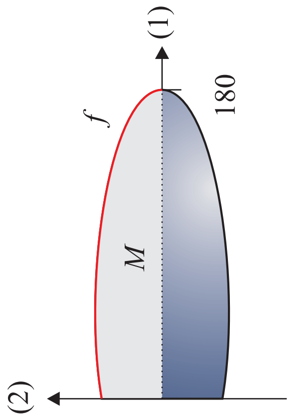
a) Bestem den vandrette afstand mellem to toppe samt den lodrette afstand mellem top og bund på kanten af tagpladen, når tagpladen ligger på et vandret gulv.

Det oplyses, at en bestemt tagplade er 1000 mm bred og 1000 mm lang.

b) Bestem overfladearealet af tagpladens overside.

3.D2.24 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 19 \cdot \frac{\sqrt{-x^2 + 100x + 14400}}{65}, \quad 0 \leq x \leq 180.$$



Grafen for f afgrænser sammen med koordinatsystemets akser i første kvadrant en punktmængde M. Bemærk, at førsteaksen er lodret på figuren.

Billedet viser en cigarformet bygning. I en model har bygningen form som det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° omkring førsteaksen, og enheden på akserne er meter.


www.colourbox.com

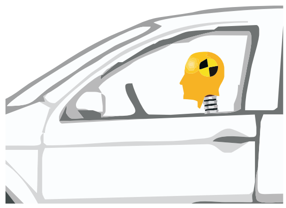
a) Benyt modellen til at bestemme bygningens volumen.

Det oplyses, at overfladearealet af et omdrejningslegeme i intervallet $[a;b]$ kan beregnes ved integralet

$$O = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

b) Bestem overfladearealet af bygningen.

3.D2.25 I forbindelse med en crash-test kan førerdukkens deceleration beskrives ved funktionen



$$a(t) = \frac{16400}{(t-68)^2 + 400} + \frac{1480}{(t-93)^2 + 18}, \quad 0 \leq t \leq 140,$$

hvor $a(t)$ betegner førerdukkens deceleration (målt i m/s^2) til tidspunktet t (målt i ms).

a) Tegn grafen for a.

b) Bestem førerdukkens største deceleration.

Som et mål for, hvor voldsomt førerens hoved påvirkes af crash´et, anvendes værdien *Severity Index* (*SI*), som er bestemt ved

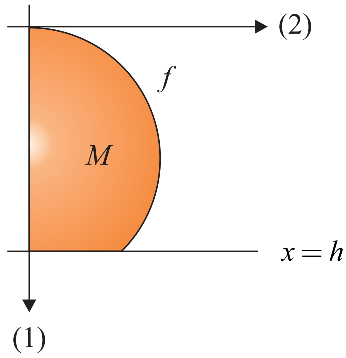
$$SI = \int_0^T (a(t))^{2,5}\, dt.$$

hvor T betegner tiden (målt i ms).

c) Bestem SI, når $T = 140$ ms.

Kilde: Crash Tests and the Head Injury Criterion, HANS-WOLFGANG HENN, TEACHING MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS Volume 17*, No.* 4*,* 1998.

3.D2.26



En funktion f er bestemt ved

$$f(x)=\sqrt{-x^2+20x}\text{ , hvor } 0\leq x\leq 20\ .$$

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen og linjen $x=h$ et område M.
Det oplyses, at $10\leq h\leq 20$.

Det ydre af en serie af lamper har form som overfladen af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes $360°$ omkring førsteaksen. Enheden på begge akser er cm.

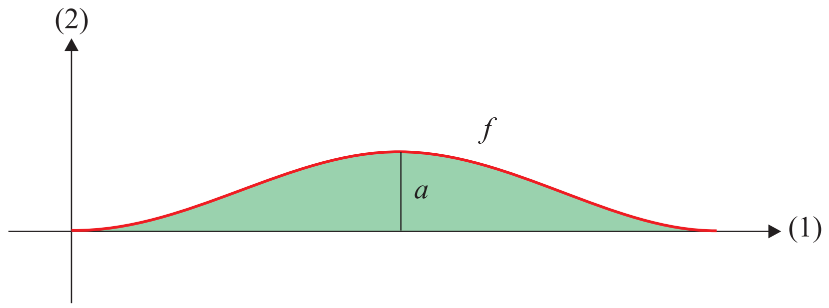
a) Bestem lampens diameter på det bredeste sted og ved lampens åbning, når $h=18$.

Det oplyses, at lampens overfladeareal kan beregnes ved integralet

$$O=2\pi\int_0^h f(x)\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx\ .$$

b) Bestem h, når overfladearealet er 1005.

3.D2.27 En lampe ses fra siden.



På figuren er lampen placeret i et koordinatsystem, hvor lampens øvre profil følger grafen for funktionen f, og den nedre profil følger førsteaksen.
Funktionen f har forskriften

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{2\pi}{33}x - \frac{\pi}{2}\right) + 2\ ,\ 0 \le x \le 33\ .$$

a) Bestem lampens maksimale højde a (se figur).

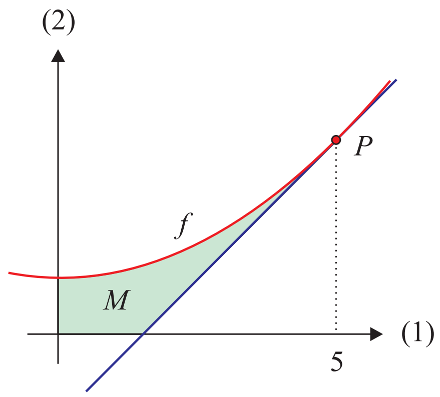
b) Bestem lampens tværsnitsareal.

3.D2.28 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 1 + 0{,}1 \cdot x^2\ .$$

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(5, f(5))$.

Grafen for f og tangenten til grafen for f i punktet P afgrænser sammen med koordinatakserne en punktmængde M (se figur).



Formen for en bestemt lerskål fremkommer ved, at punktmængden M drejes 360° omkring førsteaksen.

b) Bestem førstekoordinaten til tangentens skæringspunkt med førsteaksen.

c) Benyt modellen til at bestemme volumen af den ler, skålen er lavet af.

3.D2.29 En funktion f er bestemt ved

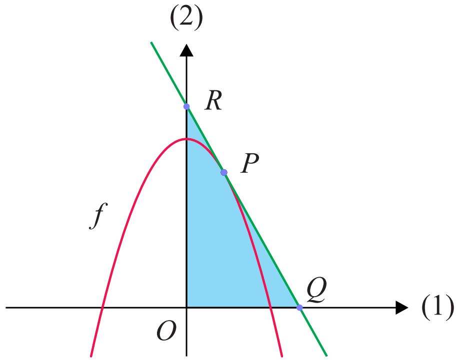
$$f(x) = -x^2 + 4\,.$$

Grafen for f og koordinatsystemets akser afgrænser i første kvadrant en punktmængde M, der har et areal.

a) Bestem arealet af M.

Når $0 < a < 2$, skærer tangenten til grafen for f i punktet $P(a, f(a))$ koordinatsystemets akser i punkterne Q og R (se figuren). Det oplyses, at arealet af trekant OQR er en funktion af a, som er givet ved

$$T(a) = \frac{(a^2+4)^2}{4a},\ \ 0 < a < 2.$$



b) Bestem den værdi af a, der gør arealet af trekant OQR mindst muligt.

c) Bestem koordinatsættet til hvert af punkterne Q og R udtrykt ved a, og gør rede for, at arealet af trekant OQR som funktion af a er givet ved $T(a)$.

4. Funktioner af to variable

Delprøve 1

4.D1.1 En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x,y) = 4x^3 \cdot y.$$

a) Bestem forskriften for den funktion, der beskriver snitkurven til f når $y = 4$.

b) Bestem $f'_x(x,y)$ og $f'_y(x,y)$.

4.D1.2 En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x,y) = 2y + x^2.$$

a) Bestem $f(-2,3)$.

b) Bestem $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ og $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$.

4.D1.3 En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x,y) = 2x \cdot y + x^2.$$

a) Bestem $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ og $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$.

b) Bestem gradienten for f i punktet $P(1,2,f(1,2))$.

4.D1.4 Om en funktion f af to variable oplyses, at

$$f''_{xx}(x,y) = 2 \quad f''_{yy}(x,y) = 6y + 12 \quad f''_{xy}(x,y) = 0.$$

Det oplyses, at $P(1,-1,4)$ er et stationært punkt for f.

a) Bestem arten af P.

4.D1.5 For en funktion f af to variable oplyses, at punktet $P(-2,-1,19)$ er et stationært punkt. Der gælder desuden at

$$f''_{xx}(-2,-1)=-12 \qquad f''_{yy}(-2,-1)=2 \qquad f''_{xy}(-2,-1)=0.$$

a) Bestem arten af P.

Delprøve 2

4.D2.1 En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x,y)=\frac{2x\cdot y}{x^2+1}.$$

a) Tegn grafen for f.

b) Bestem forskriften for snitfunktionen til f når $y=4$.

c) Løs ligningen $f(x,4)=1$, og forklar den grafiske betydning af løsningerne.

4.D2.2 En funktion f er givet ved

$$f(x,y)=x^2+(y-1)^2-3.$$

a) Argumentér for, at niveaukurven $f(x,y)=6$ er en cirkel.

b) Bestem de værdier af k, hvor ligningen $f(x,y)=k$ ikke har nogen løsning.

4.D2.3 En funktion f af to variable har forskriften

$$f(x,y)=\frac{6x}{x\cdot y+3}.$$

a) Bestem $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ og $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$.

4.D2.4 En funktion f er givet ved

$$f(x,y)=4x+y^2+x\cdot y.$$

a) Tegn grafen for f i grafvinduet $[-5,5]\times[-5,5]\times[-30,70]$.

b) Bestem gradienten for f i punktet $P\left(1,3,f(1,3)\right)$, og forklar hvad gradienten fortæller om grafens stejlhed i punktet P.

4.D2.5 En funktion *f* af to variable har forskriften

$$f(x,y)=\frac{e^x}{y^2+1}.$$

a) Bestem $f_x'(0,1)$ og $f_y'(0,1)$.

b) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for *f* i punktet $P(0,1,f(0,1))$.

4.D2.6 For en funktion *f* af to variable oplyses, at

$$f_{xx}''(x,y)=6x \qquad f_{yy}''(x,y)=24y^2 \qquad f_{xy}''(x,y)=0.$$

Det oplyses, at $P(2,-1,8)$ er et stationært punkt for *f*.

a) Bestem arten af *P*.

4.D2.7 Funktionen *f* er givet ved

$$f(x,y)=x^2+(y-3)^2+1.$$

a) Bestem de dobbelt afledede og den blandede afledede af *f*.

b) Bestem det stationære punkt for funktionen *f*.

c) Bestem arten af det stationære punkt for *f*.

4.D2.8 Funktionen *f* er givet ved

$$f(x,y)=e^x\cdot(y^3+y).$$

a) Argumentér for, at funktionen *f* ikke har nogle stationære punkter.

4.D2.9 I 2001 fandt amerikanske og canadiske forskere, at sammenhængen mellem den oplevede temperatur og den aktuelle temperatur ved forskellige vindhastigheder, det såkaldte "windchill indeks", kan beskrives ved

$$f(t,v)=13{,}3+0{,}62\cdot t-13{,}95\cdot v^{0{,}16}+0{,}486\cdot t\cdot v^{0{,}16},$$

hvor $f(t,v)$ er "windchill indekset" (målt i °C), t er den aktuelle målte temperatur (målt i °C), og v er vindhastigheden (målt i m/s).

a) Bestem $f(-5,20)$, og forklar betydningen af værdien.

b) Bestem den vindhastighed, der ved en temperatur på $-3°\mathrm{C}$ giver et "windchill indeks" på $-10°\mathrm{C}$.

Kilde: www.dmi.dk

4.D2.10 I en model kan overfladearealet af en menneskekrop beskrives ved

$$A(m,h)=0{,}007184\cdot m^{0{,}425}\cdot h^{0{,}725},$$

hvor $A(m,h)$ er personens overfladeareal (målt i m^2), m er personens vægt (målt i kg) og h er personens højde (målt i cm).

En bestemt person vejer 67 kg og er 170 cm høj.

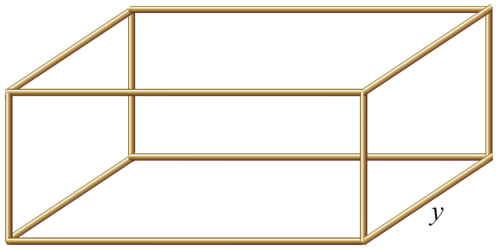
a) Bestem personens overfladeareal.

b) Tegn grafen for A sammen med punktet $P(67{,}170,A(67{,}170))$.

c) Bestem $A_m'(67{,}170)$, og forklar betydningen af tallet.

Kilde: http://www-users.med.cornell.edu/~spon/picu/calc/bsacalc.htm

4.D2.11



Skelettet til en kasse består af 12 tynde rør. Den totale længde rør, der benyttes til at konstruere kassen, er 500 cm.
Det oplyses, at kassens overfladeareal A er givet ved

$$A(x,y)=250x+250y-2x^2-2y^2-2x\cdot y,$$

hvor x og y er sidelængderne på kassens bund (målt i cm).

a) Bestem overfladearealet for den kasse, hvor bunden har sidelængderne 20 cm og 30 cm.

b) Bestem de dobbelt afledede og den blandede afledede for A.

Det oplyses, at sidelængderne x og y højest kan være 100 cm.

c) Bestem kassens maksimale overfladeareal.

4.D2.12 Prisen for kørsel med taxa i en given by er givet ved

$$P(x,y)=8x+6y+35,$$

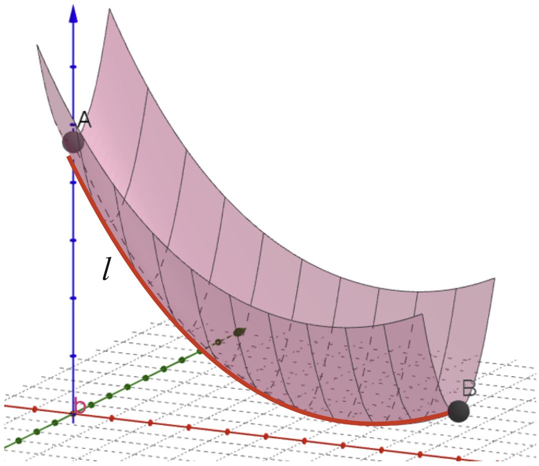
hvor $P(x,y)$ er den samlede pris (målt i kr.), x er den kørte afstand (målt i km) og y er tiden turen tager (målt i minutter).

En bestemt tur kostede 185 kr. og tog 10 minutter.

a) Bestem hvor langt taxaen kørte.

b) Bestem de partielt afledede, og forklar betydningen af de to tal.

4.D2.13 Figuren viser en model af en vandrutsjebane indtegnet i et koordinatsystem med enheden meter.



I modellen er overfladen af vandrutsjebanen grafen for funktionen *f* givet ved

$$f(x,y) = 0{,}3 \cdot \mathrm{e}^{0{,}125x} + 12{,}1 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}125x} - 3 + y^2, \quad 0 \leq x \leq 20 \text{ og } -2 \leq y \leq 2,$$

hvor $f(x,y)$ er vandrutsjebanens højde over jordoverfladen.

Punktet *A* er givet ved $(0,0,f(0,0))$, og punktet *B* er givet ved $(20,0,f(20,0))$.

a) Bestem hvor højt punktet *A* er placeret over jordoverfladen.

Den krumme kant *l* af vandrutsjebanen fra *A* til *B* fremkommer i modellen som snitkurven for *f* i *x*-retningen når $y = 0$.

b) Bestem forskriften for snitkurven som funktion af *x*.

c) Bestem længden af snitkurven.

4.D2.14 En funktion *f* er givet ved

$$f(x,y) = 2y^3 - 3x^2 + k \cdot y + 18x + 16,$$

hvor *k* er en konstant.

Det oplyses, at $P(3,2,f(3,2))$ er et stationært punkt for *f*.

a) Bestem konstanten *k*.

b) Bestem arten af det stationære punkt *P*.

4.D2.15 En funktion f er givet ved

$$f(x,y) = x^4 + p \cdot x^2 \cdot y + q \cdot y^2 - 8y,$$

hvor p og q er konstanter.

a) Bestem konstanterne p og q, så $\nabla f(2,1) = \begin{pmatrix} 28 \\ -8 \end{pmatrix}$.

b) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f i punktet $P(2,1,f(2,1))$.

5. Differentialligninger

Delprøve 1

5.D1.1

a) Undersøg, om $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^x + 3x$ er en løsning til differentialligningen

$$y' = y + \frac{y}{x} - 3x.$$

5.D1.2

a) Undersøg, om funktionen $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ er en løsning til differentialligningen

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = x.$$

5.D1.3

a) Gør rede for, at funktionen $f(x) = (x+1) \cdot \mathrm{e}^x$ er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = y + \frac{y}{x+1}.$$

5.D1.4

En funktion *f* er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot (x-1)\,,$$

og grafen for *f* går gennem punktet $P(3,5)$.

a) Bestem linjeelementet i *P*, og gør rede for betydningen af dette.

b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet *P*.

5.D1.5

En funktion *f* er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 3x + 2y.$$

Det oplyses, at tangenten til grafen for *f* i punktet $P(1, f(1))$ har hældningskoefficienten 9.

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet $P(1, f(1))$.

5.D1.6

I en model kan antallet af skarvkolonier i Danmark i perioden 1982-2008 beskrives ved en funktion S af tiden t (målt i år efter 1982). Den hastighed, hvormed antallet af skarvkolonier vokser til tidspunktet t, er proportional med produktet af antallet af skarvkolonier til tidspunktet t og forskellen mellem 67 og antallet af skarvkolonier til tidspunktet t.
Det oplyses, at proportionalitetskonstanten er $k = 0,0029$.

a) Opskriv en differentialligning, som S må opfylde.

Kilde: "Forvaltningsplan for skarv i Danmark", Skov- og Naturstyrelsen, Miljøministeriet, 2009.

5.D1.7

Grafen for en funktion f går gennem punktet $P(0,3)$. Funktionen f har den egenskab, at i ethvert punkt $(x, f(x))$ på grafen er tangentens hældningskoefficient proportional med $f(x)$. Proportionalitetskonstanten er 0,2.

a) Bestem hældningskoefficienten for tangenten til grafen for f i punktet P.

b) Opstil en differentialligning, der har f som løsning.

5.D1.8

En steg sættes til langtidsstegning i en ovn. I en model er stegens indre temperatur T (målt i $°C$) en funktion af tiden x (målt i minutter). Den hastighed, hvormed stegens indre temperatur stiger til tidspunktet x, er proportional med forskellen mellem ovnens temperatur og stegens indre temperatur.
Det oplyses, at ovnens temperatur er $150°C$, og at proportionalitetskonstanten er 0,011.

a) Opstil en differentialligning, som T må opfylde.

Foto: commons.wikimedia.org

5.D1.9

Der løber vand fra en vandhane ned i et badekar med en hastighed på 0,4 L/s. Bundproppen i badekaret er lidt utæt, så vandet løber samtidigt ud af badekarret med en hastighed, der er proportional med vandmængden i badekarret (målt i L). Det oplyses, at proportionalitetskonstanten er 0,001 s^{-1}.

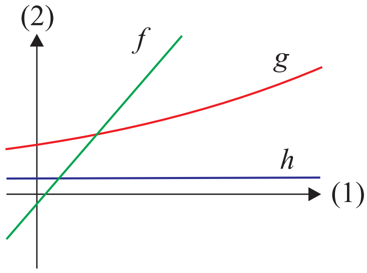
a) Indfør passende variable, og opstil en differentialligning, der beskriver, hvordan vandmængden i badekarret ændrer sig med tiden.

5.D1.10 Figuren viser graferne for tre funktioner f, g og h. Hver af de tre funktioner er løsning til netop en af differentialligningerne:

$$A: \quad \frac{dy}{dx}=0$$

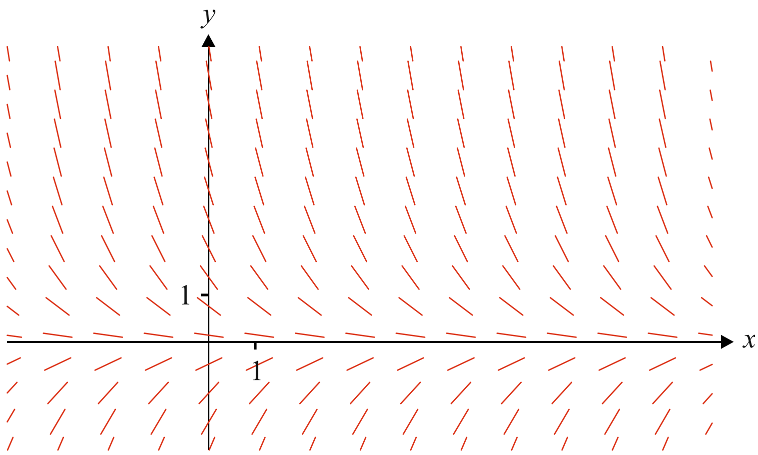
$$B: \quad \frac{dy}{dx}=2$$

$$C: \quad \frac{dy}{dx}=0{,}1\cdot y$$



a) Gør rede for, hvilken af differentialligningerne A, B og C, der hører til hvilken graf for funktionerne f, g og h.

5.D1.11 Figuren viser et hældningsfelt for en differentialligning.

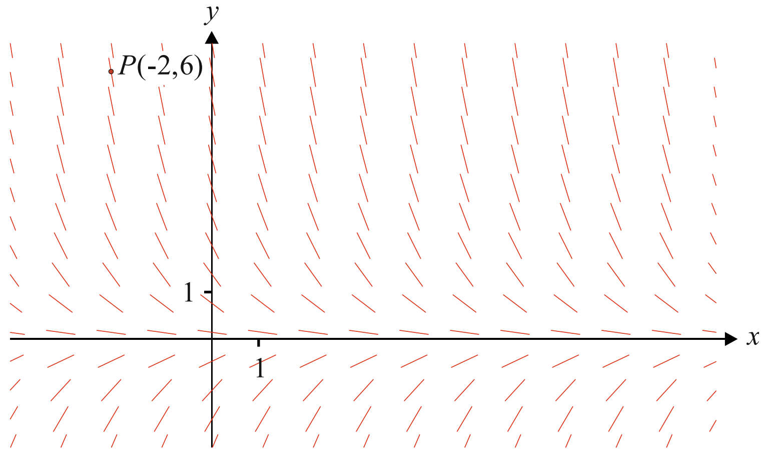


a) Afgør, om funktionen

$$f(x)=3\cdot \mathrm{e}^{x}$$

kan være en løsning til differentialligningen.

5.D1.12 På figuren ses hældningsfeltet hørende til en differentialligning.



a) Skitsér den løsningskurve, der går gennem punktet $P(-2,6)$.

5.D1.13 En funktion *f* er løsning til differentialligningen

$$y' = -0,5 \cdot y.$$

Grafen for *f* går gennem punktet $P(2,1)$.

a) Bestem en forskrift for *f*.

5.D1.14 En funktion *f* er løsning til differentialligningen

$$y' = 3 - a \cdot y,$$

hvor a er en konstant.

Det oplyses, at $(0,2;-1)$ er et linjeelement for differentialligningen.

a) Bestem a.

b) Bestem en forskrift for *f*.

5.D1.15 En funktion *f* er løsning til differentialligningen

$$y' = y \cdot (1 - 0,2 \cdot y).$$

Grafen for *f* går gennem punktet $P(0,1)$.

a) Bestem en forskrift for *f*.

5.D1.16 I en model kan udviklingen i en populations størrelse beskrives ved en differentialligning af typen

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y \cdot (M - y),$$

hvor $y(t)$ betegner antallet af individer i populationen til tiden t, M betegner den øvre grænse for populationens størrelse, og a er en konstant.

Det oplyses om modellen, at den øvre grænse for antallet af individer er 1000, der er 100 individer til tiden $t = 0$ og $a = 0{,}0001$.

a) Bestem veksthastigheden for antallet af individer i populationen til tiden $t = 0$.

b) Bestem en forskrift for y.

5.D1.17 Differentialligningen

$$f'(x) = 1 + \frac{f(x)}{x}$$

har en løsning f, hvis graf går gennem punktet $P(1,2)$.

a) Angiv en ligning for grafens tangent i P.

En funktion g er bestemt ved

$$g(x) = \frac{1}{x} \cdot f(x), \quad x > 0.$$

b) Gør rede for, at $g'(x) = \frac{1}{x}$, og benyt dette resultat til at bestemme $f(x)$.

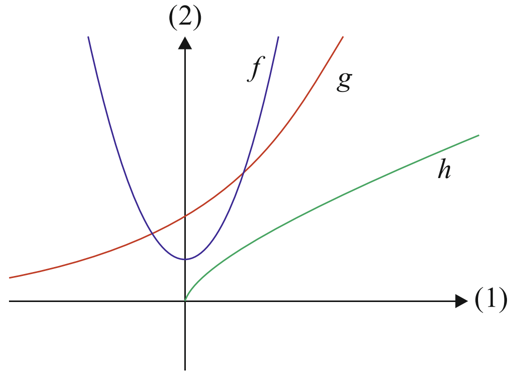
5.D1.18 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 5y - y^2,$$

a) Bestem væksthastigheden, når $y = 2$.

b) Bestem de y-værdier, hvor væksthastigheden er 4.

5.D1.19 På figuren ses graferne for tre funktioner *f*, *g* og *h*.

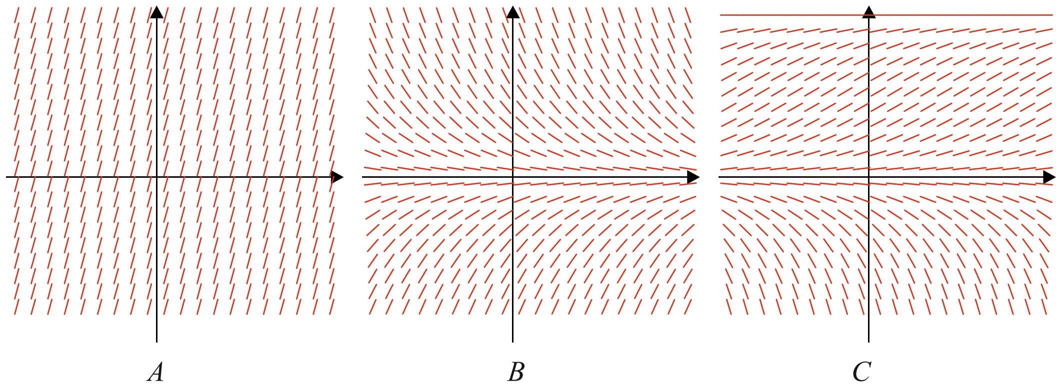


Det oplyses, at en af de tre funktioner er løsning til differentialligningen

$$y' = 0{,}3 \cdot y.$$

a) Argumentér for, hvilken af de tre funktioner der er løsning til differentialligningen.

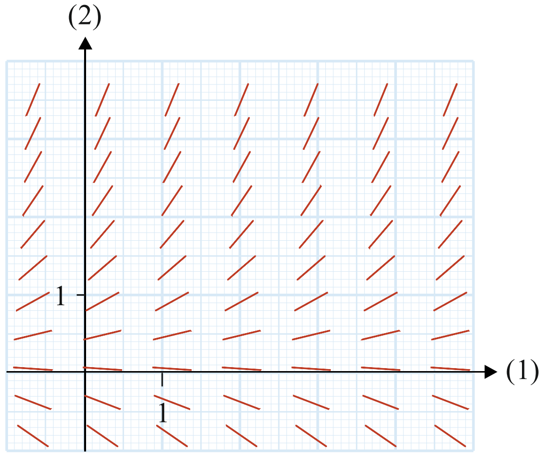
5.D1.20 På figurerne ses 3 forskellige hældningsfelter, der hver hører til en differentialligning.



a) Argumentér for, hvilket af de tre hældningsfelter, der hører til differentialligningen

$$y' = -0{,}6y.$$

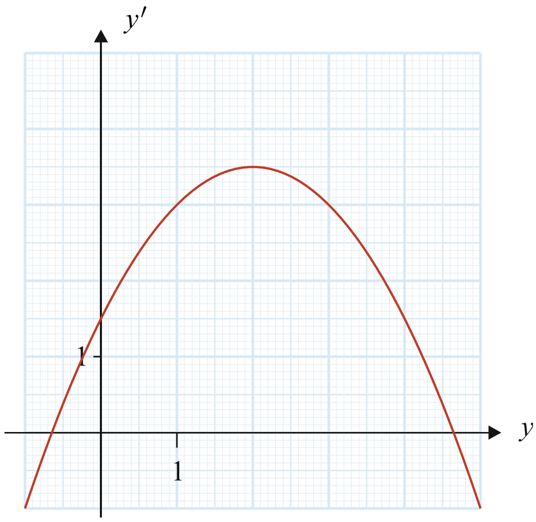
5.D1.21 Figuren viser et plot af linjeelementer for en differentialligning.



Det oplyses, at funktionen f er en løsning til differentialligningen, og at grafen for f går gennem punktet $P(2,3)$.

a) Indtegn tangenten til grafen for f i punktet P, og opskriv det tilhørende linjeelement.

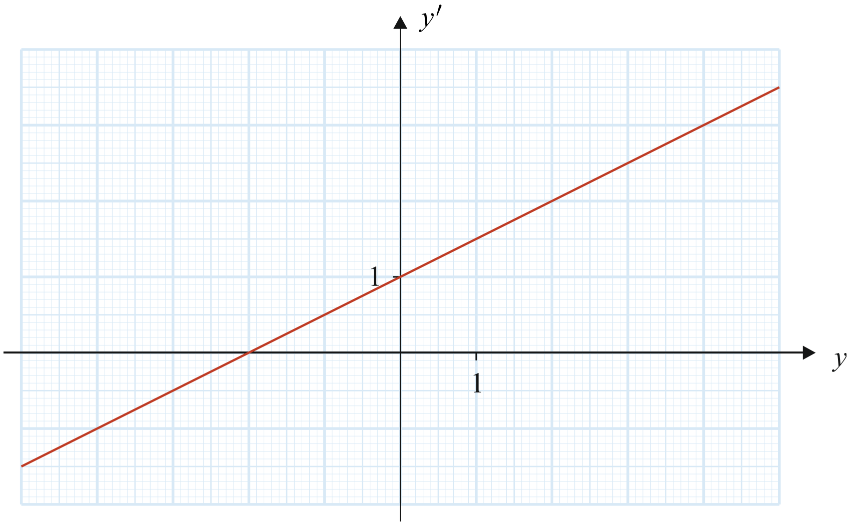
5.D1.22 På figuren ses sammenhængen mellem y og y' for en differentialligning.



Det oplyses, at funktionen f er en løsning til differentialligningen, og at grafen for f går gennem punktet $P(6,1)$.

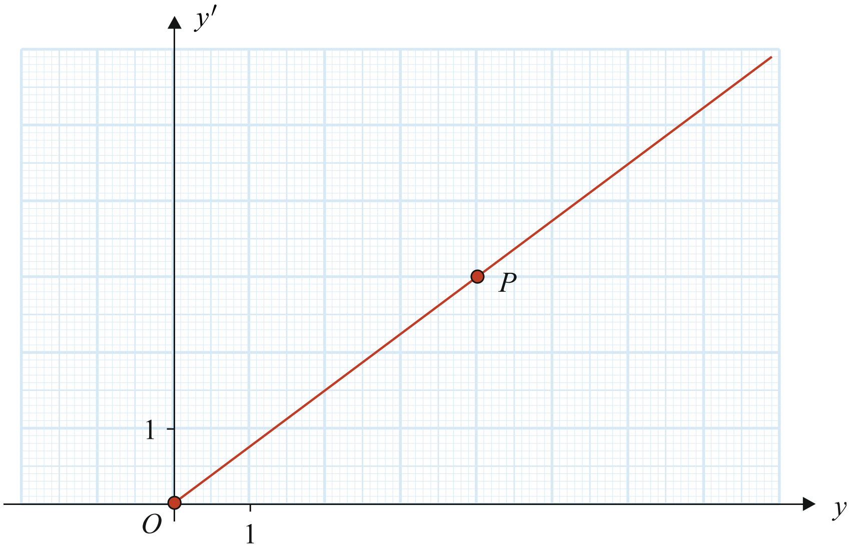
a) Aflæs vaksthastigheden i P, og opskriv det tilhørende linjeelement i P.

5.D1.23 På figuren ses sammenhængen mellem y og y' for en differentialligning.



a) Angiv de y-værdier, hvor væksthastigheden er positiv.

5.D1.24 På figuren ses sammenhængen mellem y og y' for en differentialligning.



Det oplyses, at der er en lineær sammenhæng mellem $y'(t)$ og $y(t)$. Det oplyses endvidere, at grafen for denne sammenhæng går gennem punkterne $O(0, 0)$ og $P(4,3)$.

a) Opstil en differentialligning, der beskriver sammenhængen mellem $y'(t)$ og $y(t)$.

Delprøve 2

5.D2.1 a) Bestem den løsning *f* til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \cdot y}{\ln(y)},$$

hvis graf går gennem punktet $P(3, \frac{1}{e})$.

5.D2.2 En funktion *f* er løsning til differentialligningen

$$(x+5) \cdot \frac{dy}{dx} = \sqrt{y},$$

og grafen for *f* går gennem punktet $P(-4,1)$.

a) Bestem forskriften for *f*.

5.D2.3 En differentialligning er givet ved

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (y+1).$$

a) Tegn et hældningsfelt til differentialligningen med grafen for den løsningskurve, der går igennem punktet $(1,1)$.

b) Løs ligningen $x \cdot (y+1) = 0$, og argumentér for hvilke linjeelementer, der svarer til løsningerne.

5.D2.4 En differentialligning er givet ved

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x-4}.$$

a) Tegn et hældningsfelt til differentialligningen sammen med grafen for den løsningskurve, der går igennem punktet $(2,5)$.

5.D2.5 En mølkugle fordamper, og under fordampningen kan dens masse beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dM}{dt} = -k \cdot M^{\frac{2}{3}},$$

hvor *M* betegner mølkuglens masse (målt i gram), og *t* betegner tiden (målt i døgn).

Til tidspunktet $t = 0$ vejer mølkuglen 1 gram, og 75 døgn senere vejer den 0,5 gram.

a) Bestem *M* som funktion af *t*.

b) Hvor lang tid varer det, før mølkuglen er fordampet?

5.D2.6 Udviklingen i den danske skarvbestand kan beskrives ved modellen

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dt} = 0{,}24 - 0{,}013 \cdot t,$$

hvor *N* betegner skarvbestanden, målt i antal individer, og *t* betegner antal år efter 1980.

Det oplyses, at der i 1992 var 156000 skarver i Danmark.

a) Bestem en forskrift for *N*.

b) Bestem det største antal skarver i Danmark ifølge modellen.

5.D2.7 I en model kan udviklingen i massen af et bestemt radioaktivt stof i en lukket beholder beskrives ved en funktion $M(t)$, der er løsning til differentialligningen

$$M' = -0{,}069 \cdot M + 9{,}627 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}0096 \cdot t},$$

hvor $M(t)$ er massen (målt i mg) til tidspunktet *t* (målt i døgn).
Det oplyses, at $M(0) = 0$.

a) Bestem en forskrift for $M(t)$.

b) Tegn grafen for *M*, når *t* ligger i intervallet [0,100].

c) Bestem det tidspunkt, hvor væksthastigheden ifølge modellen er 0.

5.D2.8 I en model kan udviklingen af klorkoncentrationen i et bestemt svømmebassin beskrives ved differentialligningen

$$y'(t) = -0{,}03 \cdot y(t),$$

hvor $y(t)$ betegner klorkoncentrationen (målt i mg/liter) til tidspunktet t (målt i timer).

Det oplyses, at klorkoncentrationen i badevandet er 1,8 mg/liter til tidspunktet $t = 0$.

a) Bestem den hastighed, som klorkoncentrationen aftager med, når klorkoncentrationen er på 1,2 mg/liter.

b) Bestem klorkoncentrationen $y(t)$ som en funktion af tiden t.

c) Tegn det tilhørende hældningsfelt sammen med grafen for den fundne løsning.

5.D2.9 SARS-epidemiens udvikling i Singapore i 2003 kan i en model beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}00526 \cdot N \cdot (209 - N),$$

hvor N er antal smittede til tidspunktet t (målt i døgn).

a) Benyt modellen til at bestemme væksthastigheden til det tidspunkt, hvor antal smittede var 100.

Det oplyses, at der efter 30 døgn var 103 smittede.

b) Bestem $N(t)$.

c) Gør rede for, hvad tallet 209 i modellen fortæller om epidemiens udvikling.

5.D2.10 I en model for et containerskibs CO_2-udledning kan skibets CO_2-udledning beskrives ved en funktion *U*, der er løsning til differentialligningen

$$\frac{dU}{dx} = 0{,}1518 \cdot U$$

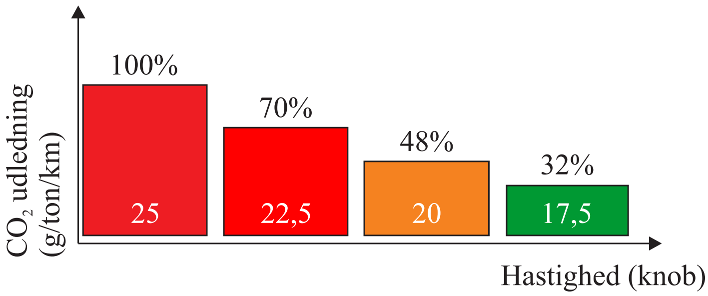
hvor *U* er skibets CO_2-udledning (målt i g/ton/km), og *x* er skibets fart (målt i knob).

I modellen er containerskibets CO_2-udledning på 6,25 g/ton/km, når skibets fart er 25 knob.

a) Bestem en forskrift for *U*.

b) Benyt modellen til at bestemme skibets fart, når dets CO_2-udledning er 4 g/ton/km.

c) Undersøg, om modellen understøtter påstanden, der fremgår af nedenstående figur, at man kan reducere CO_2-udledningen fra 100% ved en fart på 25 knob til 32% ved en fart på 17,5 knob.



5.D2.11 I en model for farten af en raket, der skydes lodret op, er rakettens fart som funktion af tiden en løsning til differentialligningen

$$\frac{dv}{dt} - \frac{1}{15-t} \cdot v = \frac{300}{15-t} - 9{,}81 \quad , \qquad 0 \le t \le 14$$

hvor $v(t)$ er rakettens fart (målt i m/s) til tidspunktet *t* målt i sekunder efter affyring.

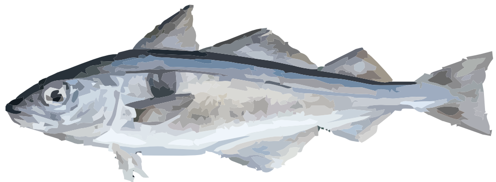
Til tidspunktet $t = 0$ er rakettens fart 0 m/s.

a) Bestem en forskrift for *v*.

b) Benyt modellen til at bestemme det tidspunkt, hvor rakettens fart når op på 1000 m/s.

Foto: NASA

5.D2.12



I en model for fiskearten kuller i Nordsøen er længden af en fisk en funktion af fiskens alder, som tilfredsstiller differentialligningen

$$\frac{dL}{dt} = k \cdot (100 - L),$$

hvor k er en konstant, L angiver fiskens længde målt i cm, og t angiver fiskens alder målt i år.

Det oplyses, at til tidspunktet $t = 0$ er fiskens længde 0,4 cm, og til tidspunktet $t = 1$ er fiskens længde 11 cm.

a) Bestem L som funktion af t.

Længden af kuller fanget i Nordsøen er normalt mellem 40 cm og 60 cm.

b) Bestem aldersintervallet for kuller, der normalt fanges i Nordsøen.

5.D2.13

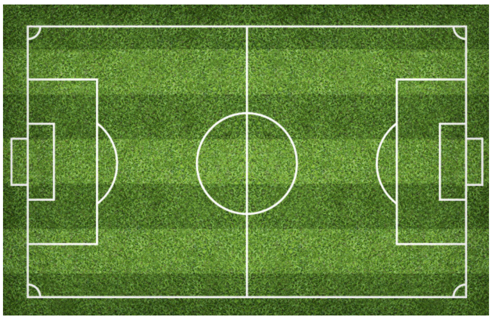


Foto: Freepik.com

I en model kan græshøjden på en fodboldbane i sommersæsonen beskrives ved en løsning til differentialligningen

$$\frac{dh}{dt} = 0{,}16 \cdot h,$$

hvor h er græshøjden (målt i cm) til tidspunktet t (målt i døgn efter sidste græsslåning).

a) Hvor hurtigt vokser græsset ifølge modellen, når græshøjden er 4 cm?

Det oplyses, at græshøjden er 3 cm umiddelbart efter græsslåning. Endvidere oplyses det, at græsset først slås, når græshøjden er 8 cm.

b) Benyt modellen til at bestemme græshøjden som funktion af tiden t.

c) Bestem tiden mellem to græsslåninger.

5.D2.14 Et vandbad opvarmes fra 20°C til 100°C. Den indre temperatur (målt i °C) i et bestemt objekt, der befinder sig i vandbadet under opvarmningen, er en funktion f af tiden t (målt i sekunder). Det oplyses, at f er en løsning til differentialligningen

$$y' = 0{,}03 \cdot (g(t) - y),$$

hvor $g(t)$ betegner vandbadets temperatur (målt i °C) til tiden t (målt i sekunder). Endvidere oplyses det, at til tidspunktet $t = 0$ er objektets indre temperatur 10°C, og at

$$g(t) = 20 + 0{,}25 \cdot t, \quad 0 \le t \le 320.$$

a) Bestem objektets indre temperatur, når vandbadets temperatur bliver 100°C.

5.D2.15 For en bestemt population af fisk har man gennem en årrække opgjort den relative vækshastighed (målt i år^{-1}). Resultatet fremgår af nedenstående tabel.

Årstal	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Relativ væksthastighed	0,398	0,302	0,259	0,221	0,158	0,124

I en model kan udviklingen i den relative væksthastighed beskrives ved en funktion af typen

$$f(t) = b \cdot a^t,$$

hvor $f(t)$ betegner den relative væksthastighed (målt i år^{-1}) til tidspunktet t (målt i antal år efter 2001).

a) Benyt tabellens data til at bestemme a og b.

I modellen kan antallet af fisk i populationen beskrives ved en funktion, der er løsning til differentialligningen

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dt} = f(t),$$

hvor $N(t)$ er antal fisk i populationen til tidspunktet t (målt i antal år efter 2001). Det oplyses, at der er 520 fisk i populationen i år 2001.

b) Bestem en forskrift for N.

c) Bestem det år, hvor antallet af fisk i populationen overstiger 2000.

5.D2.16 I en model er en persons vægt som funktion af tiden en løsning til differentialligningen

$$\frac{dm}{dt} = \frac{k}{7000} - \frac{42}{7000} \cdot m \, ,$$

hvor $m(t)$ betegner personens vægt (målt i kg) til tidspunktet t (målt i døgn), og k er personens kostindtag (målt i kcal/døgn).

En bestemt person vejer 85 kg og indtager 3300 kcal/døgn.

a) Hvad er væksthastigheden for denne persons vægt?

Om en anden person oplyses, at personen vejer 87 kg til tidspunktet $t = 0$.

b) Bestem personens vægt udtrykt ved t og k.

c) Bestem k, så personen vejer 80 kg efter 100 døgn.

5.D2.17 I en model for en bestemt kemisk reaktion omdannes et stof A. Mængden af stoffet A som funktion af tiden er en løsning til differentialligningen:

$$\frac{dM}{dt} = -k \cdot M^2,$$

hvor k er en konstant, og M er mængden (målt i mg) af stoffet A til tidspunktet t (målt i minutter). Til tidspunktet $t = 0$ er der 70 mg af stoffet A, og til tidspunktet $t = 60$ er der 20 mg tilbage af stoffet A.

a) Bestem en forskrift for $M(t)$.

b) Tegn et hældningsfelt sammen med grafen for den fundne løsning.

c) Bestem linjeelementet i punktet $P(60, M(60))$, og gør rede for betydningen af dette linjeelement.

5.D2.18

Foto: Freepik.com

Ved en bestemt sygdom tilføres en patient medicin intravenøst over en femtimers periode. Medicinen tilføres kontinuerligt med en bestemt mængde p (målt i µg pr. time). Den mængde medicin M (målt i µg), som til tidspunktet t (målt i timer) er i patientens blodbaner, opfylder differentialligningen

$$\frac{dM}{dt} = p - 0{,}03 \cdot M \ ,$$

hvor det desuden gælder, at $M(0) = 0$.

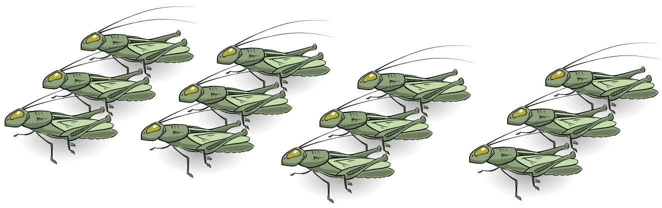
a) Tegn et hældningsfelt når $p = 30$ i vinduet [0; 5]×[0; 200].

b) Bestem en forskrift for M som funktion af t udtrykt ved p.

For at kurere sygdommen skal patienten 3 timer efter have 100 µg af medicinen i blodbanerne.

c) Bestem mængden p.

5.D2.19



I en model for udviklingen i antal insekter i en bestemt population er antal insekter som funktion af tiden en løsning til differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}01 \cdot \sin(0{,}017 \cdot t - 1{,}03) \cdot N, \quad 0 \le t \le 365 \, ,$$

hvor $N(t)$ betegner antal insekter (målt i mio.) til tidspunktet t (målt i antal døgn). Det oplyses, at der til tidspunktet $t = 0$ er 100 mio. insekter i populationen.

a) Bestem en forskrift for N

b) Tegn grafen for N.

c) Bestem det tidspunkt, hvor populationens væksthastighed er størst.

5.D2.20

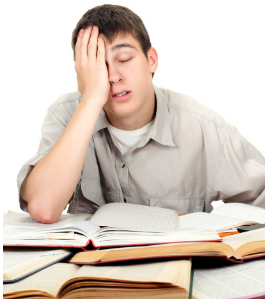


Foto: colourbox

En skole vil undersøge, hvordan CO_2-koncentrationen i ventilerede klasseværelser udvikler sig i løbet af en lektion. Funktionen $C(t)$ angiver CO_2-koncentrationen (målt i ppm) til tidspunktet t (målt i timer efter lektionens start). I en model for et bestemt klasseværelse er $C(t)$ en løsning til differentialligningen:

$$\frac{dC}{dt}=\frac{P}{0,280}-R\cdot(C-400).$$

Om parametrene P og R i modellen oplyses

P : Samlet mængde CO_2, personerne i klasseværelset udskiller pr. time (målt i liter).
R : Luftudskiftninger pr. time via ventilation i klasseværelset.

Det oplyses endvidere, at én stillesiddende person udskiller 50 liter CO_2 pr. time.

I et klasseværelse går 24 elever og 1 lærer i gang med en lektion i klasseværelset. Ved lektionens start er CO_2-koncentrationen i lokalet 400 ppm. Der er 7,0 luftudskiftninger pr. time under hele lektionen.

a) Bestem en forskrift for $C(t)$.

b) Benyt modellen til bestemme, hvor lang tid der går, inden CO_2-koncentrationen i klasseværelset overstiger 1000 ppm.

Når CO_2-koncentrationen overstiger 1000 ppm, begynder eleverne og læreren at blive mærkbart døsige. Luftudskiftningen i klasseværelset skal derfor reguleres.

c) Bestem den mindste værdi af R, så eleverne og læreren ikke bliver døsige på grund af CO_2-koncentrationen i løbet af en lektion på 1,5 time.

5.D2.21

Foto: www.colourbox.dk

I en model for optagelse af en bestemt type medicin indtaget som en pille kan mængden af medicin i blodbanen beskrives ved en løsning til differentialligningen

$$\frac{dm}{dt} = 4 \cdot d \cdot \mathrm{e}^{-4 \cdot t} - 0,21 \cdot m,$$

hvor $m(t)$ betegner mængden af medicin i blodbanen (målt i mg) til tidspunktet t (målt i timer efter indtagelsen af medicinen), og d er mængden af medicin i pillen (målt i mg).

Det oplyses, at der ikke er noget medicin i blodbanen før indtagelsen af pillen.

a) Bestem en forskrift for $m(t)$, når $d = 20$.

b) Tegn en graf for m for tre forskellige værdier af d.

c) Benyt modellen til at vise, at mængden af medicin i blodbanen aldrig vil overstige 85% af d.

5.D2.22

Grafik: www.colourbox.com

I en model for oplæring af nye medarbejdere i en bestemt produktionsvirksomhed kan udviklingen i en medarbejders produktionsevne ved en produktionslinje beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dA}{dt} = k \cdot (M - A),$$

hvor A betegner medarbejderens produktionsevne (målt i enheder pr. dag) til tidspunktet t (målt i døgn efter starten af oplæringsperioden).

For en bestemt produktionslinje oplyses, at $M = 300$ og $k = 0{,}02$, og at en medarbejder kan producere 75 enheder pr. dag til tidspunktet $t = 0$.

a) Bestem $\frac{dA}{dt}$ til $t = 0$, og giv en fortolkning af dette tal.

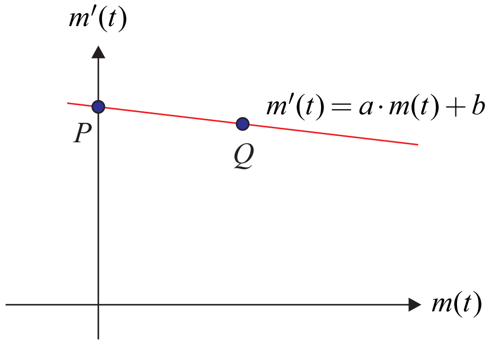
b) Benyt modellen til at bestemme, hvor længe en medarbejder skal være under oplæring for at kunne producere 200 enheder pr. dag ved denne produktionslinje.

For en anden produktionslinje oplyses det, at $M = 250$, samt at en medarbejder kan producere 50 enheder pr. dag af varen ved starten af oplæringsperioden og 120 enheder pr. dag efter 30 dages oplæring.

c) Bestem konstanten k, og forklar betydningen af M.

5.D2.23

Foto: colourbox.dk



I en model for kvælstofindholdet i en sø betegner $m(t)$ massen af kvælstof i søen (målt i kg) til tidspunktet t (målt i timer). Det oplyses, at der er en lineær sammenhæng mellem $m'(t)$ og $m(t)$. Se figuren ovenfor.
Det oplyses endvidere, at grafen for denne sammenhæng går gennem punkterne $P(0, 12.0)$ og $Q(100, 11.82)$.

a) Bestem en ligning for sammenhængen mellem $m'(t)$ og $m(t)$ i modellen.

Det oplyses, at der er 0 kg kvælstof i søen til tidspunktet $t = 0$.

b) Bestem en forskrift for $m(t)$, og benyt modellen til at bestemme massen af kvælstof i søen efter 85 timer.

5.D2.24

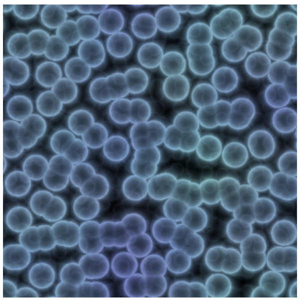


Foto: www.colourbox.dk

I en model kan udviklingen i antallet af bakterier i en bakteriesuppe beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}00002 \cdot y \cdot (10000 - y),$$

hvor y betegner antal bakterier til tidspunktet x (målt i timer).
Væksthastigheden for antal bakterier er 250 bakterier pr. time til tidspunktet $x = 40$.

a) Bestem ud fra differentialligningen de mulige antal bakterier i bakteriesuppen til tidspunktet $x = 40$.

b) Bestem den løsning til differentialligningen, hvor bakteriesuppen til tidspunktet $x = 40$ indeholder færrest bakterier.

5.D2.25 En differentialligning er givet ved

$$y' = -0{,}0002 \cdot y^3 + 0{,}051 \cdot y^2 - 0{,}5 \cdot y\,.$$

a) Tegn et hældningsfelt for differentialligningen sammen med løsningskurven gennem punktet $P(0{,}15)$.

5.D2.26 To funktioner *f* og *g* er løsninger til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = -0{,}00001 \cdot y^3 + 0{,}0051 \cdot y^2 - 0{,}05 \cdot y.$$

Det oplyses, at både *f* og *g* er monotone funktioner samt at $f(0) = 3$ og $g(0) = 20$.

a) Undersøg ved hjælp af et hældningsfelt, hvilken af funktionerne *f* og *g*, der er voksende.

5.D2.27 En funktion *f* er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}2 - 0{,}1 \cdot y^{0{,}6}.$$

Grafen for *f* går gennem punktet $P(0,2)$.

a) Tegn et hældningsfelt sammen grafen for *f* i intervallet [0;100].

b) Bestem den øvre grænse for *f*.

5.D2.28 Ved en proces fyldes der løbende væske i en beholder samtidig med, at der tappes vand ud fra en hane i bunden af beholderen. I en model kan mængden af væske i beholderen beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dV}{dt} = 5 - 2 \cdot V^{\frac{1}{3}},$$

hvor $V(t)$ betegner mængden af væske i beholderen (målt i L) til tidspunktet t (målt i minutter siden starten af processen).

a) Bestem væksthastighed, når der er 20 L væske i beholderen.

Det oplyses, at der er 25 L væske i beholderen, når processen påbegyndes.

b) Benyt modellen til at bestemme den nedre grænse for mængden af væske i beholderen under processen.

6. Vektorfunktioner og analytisk geometri

Delprøve 1

6.D1.1

En cirkel er givet ved ligningen

$$x^2 + y^2 = 25.$$

a) Vis, at punktet $Q(3,4)$ ligger på cirkelperiferien, og bestem en ligning for tangenten til cirklen i Q.

Punktet $P(x_0, y_0)$ er et vilkårligt punkt på cirkelperiferien.

b) Vis, at ligningen for tangenten i P er $x_0 \cdot x + y_0 \cdot y = 25$.

6.D1.2

En cirkel C er givet ved ligningen

$$C:\ x^2 + x + y^2 - \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}.$$

a) Bestem centrum og radius for C.

6.D1.3

En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - 5t + a \\ t+1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R},$$

hvor a er et tal.

a) Bestem tallet a, så parameterkurven for $\vec{s}$ går gennem punktet $P(0,2)$.

6.D1.4

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \sin(x) + 1.$$

a) Opskriv en forskrift for en vektorfunktion, hvis parameterkurve er en del af grafen for f.

6.D1.5

En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - 5t + 6 \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}.$$

a) Løs ligningen $x(t) = 0$, og forklar betydningen af løsningen.

6.D1.6

En vektorfunktion $\vec{r}$ er bestemt ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t+2 \\ t^2+4t+3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}.$$

a) Gør rede for, at parameterkurven for $\vec{r}$ gennemløber parablen bestemt ved ligningen $y = x^2 - 1$.

6.D1.7

En vektorfunktion $\vec{r}$ er bestemt ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t-1 \\ \sqrt{-t^2+6\cdot t+16} \end{pmatrix}, \quad -2 \le t \le 8.$$

a) Gør rede for, at parameterkurven for $\vec{r}$ er en del af cirklen med centrum i $C(2,0)$ og radius 5.

6.D1.8

a) Opskriv en vektorfunktion, der beskriver banekurven for en cirkel, der har centrum i punktet $P(2,1)$ og radius $r = 4$.

6.D1.9

En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 2t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}.$$

Punktet $P(4,4)$ ligger på parameterkurven for $\vec{s}$.

a) Bestem parameterværdien *t* hørende til *P*.

b) Gør rede for, at linjen $l:\ 2x - 5y + 12 = 0$ er en tangent til parameterkurven for $\vec{s}$ i punktet *P*.

6.D1.10

En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t^3 - t^2 \\ 2t^2 - 2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}.$$

a) Bestem en parameterfremstilling for tangenten til parameterkurven for $\vec{r}$ i punktet $P(-3,4)$.

6.D1.11

En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved koordinatfunktionerne

$$x(t) = t^2 \text{ og } y(t) = 3t - 1.$$

Det oplyses, at linjen $l: 3x - 2y + 1 = 0$ er tangent til parameterkurven for $\vec{s}$ i punktet *P*.

a) Bestem koordinatsættet til *P*.

6.D1.12

En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 3t \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}.$$

a) Undersøg, om parameterkurven for $\vec{s}$ går gennem punktet $P(-2,5)$.

6.D1.13

Om en vektorfunktion $\vec{s}$ oplyses, at hastighedsfunktionen er givet ved

$$\vec{s}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2t + 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}.$$

Parameterkurven for $\vec{s}$ går gennem punktet $P(3,4)$ når $t = 0$.

a) Bestem en forskrift for vektorfunktionen $\vec{s}$.

6.D1.14

I et koordinatsystem bevæger et punkt *P* sig således, at til tidspunktet *t* er stedvektoren $\vec{r}(t)$ til punktet *P* er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 3t \\ t \end{pmatrix}, \quad -5 \le t \le 5.$$

a) Bestem hastighedsvektoren til tidspunktet $t = 3$.

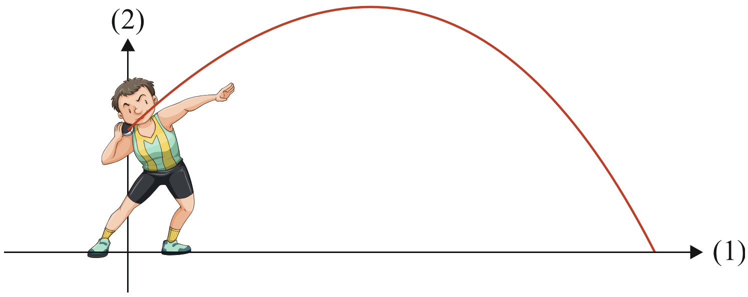
Linjen *l* er bestemt ved ligningen

$$l: \quad x - 4y - 4 = 0.$$

b) Bestem det tidspunkt, hvor hastighedsvektoren er parallel med *l*.

Delprøve 2

6.D2.1



I en model beskriver vektorfunktionen $\vec{s}$ banekurven for et kuglestød

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} 11,2\cdot t \\ -4,91\cdot t^2+8,43\cdot t+1,7 \end{pmatrix},\quad t\geq 0,$$

hvor $x(t)$ og $y(t)$ måles i meter, og t måles i sekunder efter kastets start.

a) Bestem kuglens position efter 1 sekund.

b) Bestem kuglestødets længde.

6.D2.2 En vektorfunktionen $\vec{s}$ er bestemt ved

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix},\quad t\in[0;2\pi].$$

a) Tegn parameterkurven for $\vec{s}$.

b) Undersøg, hvilken retning parameterkurven gennemløbes i.

c) Gør rede for, at hastighedsvektoren $\vec{v}$ og stedvektoren $\vec{s}$ er ortogonale i ethvert punkt på parameterkurven.

6.D2.3 En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} -t^2+4 \\ 0,1\cdot t^3+0,2\cdot t^2-t \end{pmatrix},\quad t\in \mathrm{R}.$$

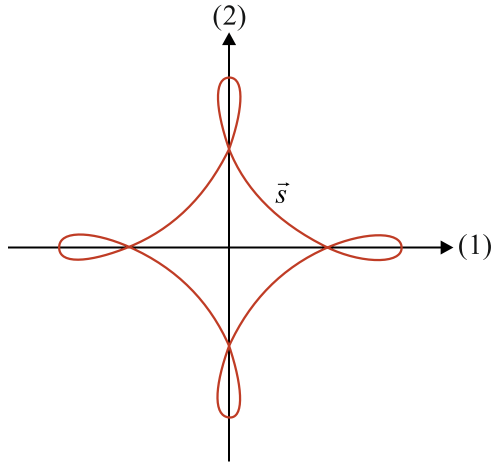
a) Tegn parameterkurven for $\vec{r}$.

b) Bestem koordinatsættene til parameterkurvens eventuelle skæringspunkter med akserne.

6.D2.4 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}10\cdot\cos(t)+5\cdot\cos(-3\cdot t)\\ 10\cdot\sin(t)+5\cdot\sin(-3\cdot t)\end{pmatrix},\quad t\in[0;2\pi].$$

På figuren ses parameterkurven for $\vec{s}$, som er symmetrisk omkring begge akser:



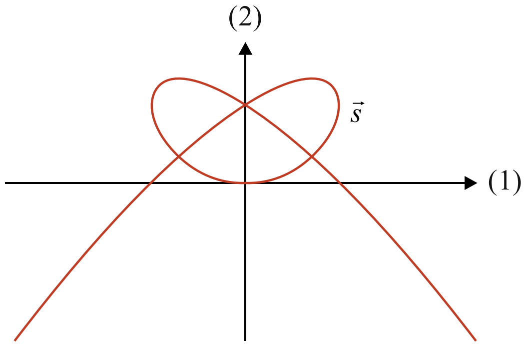
Det bemærkes, at der er fire dobbeltpunkter, og det oplyses, at det ene dobbeltpunkt P har t-værdien $t=\frac{\pi}{3}$.

a) Bestem koordinatsættet til P.

b) Bestem den anden t-værdi hørende til P.

6.D2.5 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} t^3-3t \\ -t^4+4t^2 \end{pmatrix}, \quad -2{,}5\leq t\leq 2{,}5.$$



Parameterkurven for $\vec{s}$ har tre dobbeltpunkter. Det oplyses, at et af dobbeltpunkterne har t-værdien

$$t=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right).$$

a) Bestem koordinatsættet til dette dobbeltpunkt.

Det oplyses, at der er et dobbeltpunkt i $P(-\sqrt{2},1)$.

b) Bestem t-værdierne hørende til dette dobbeltpunkt.

Det oplyses, at det sidste dobbeltpunkt ligger på andenaksen.

c) Bestem t-værdierne hørende til dette dobbeltpunkt.

6.D2.6 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} e^t\cdot\cos(t) \\ e^t\cdot\sin(t) \end{pmatrix}, \quad t\in \mathrm{R}.$$

a) Bestem hastighedsfunktionen $\vec{v}(t)$.

b) Bestem accelerationsfunktionen $\vec{a}(t)$.

6.D2.7 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} t^3-3t \\ -t^4+4t^2 \end{pmatrix}, \quad -2{,}5\leq t\leq 2{,}5.$$

Et punkt P ligger på parameterkurven for $\vec{s}$. Stedvektoren for P er $\overrightarrow{OP}=\vec{s}(-1)$.

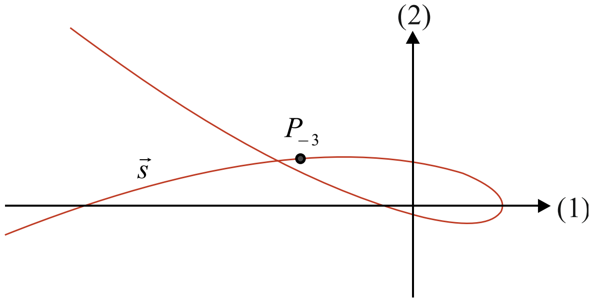
a) Bestem en parameterfremstilling for tangenten til parameterkurven for $\vec{s}$ i punktet P.

b) Tegn parameterkurven for $\vec{s}$ i intervallet $t\in[-2{,}5;2{,}5]$ sammen med tangenten i punktet P.

6.D2.8 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} -t^2 + 4 \\ 0,1 \cdot t^3 + 0,2 \cdot t^2 - t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}.$$

Nedenfor ses parameterkurven for $\vec{s}$.



a) Bestem $\vec{s}'(t)$.

b) Bestem en retningsvektor for tangenten til parameterkurven i det punkt P_{-3}, hvor $t = -3$.

c) Benyt den fundne retningsvektor til at afgøre parameterkurvens gennemløbsretning gennem punktet P_{-3}.

6.D2.9 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} -t^2 + 4 \\ 0,1 \cdot t^3 + 0,2 \cdot t^2 - t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}.$$

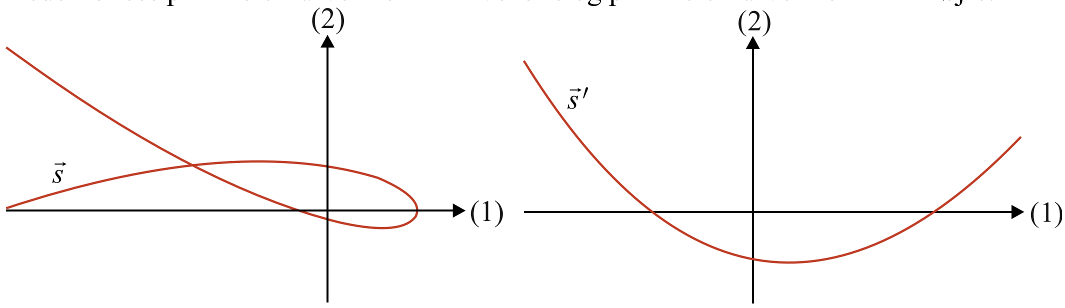
a) Tegn parameterkurven for $\vec{s}$.

b) Bestem koordinatsættene til røringspunkterne for eventuelle lodrette og vandrette tangenter til parameterkurven for $\vec{s}$.

6.D2.10 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} -t^2+4 \\ 0{,}1\cdot t^3+0{,}2\cdot t^2-t \end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Nedenfor ses parameterkurven for $\vec{s}$ til venstre og parameterkurven for $\vec{s}'$ til højre.

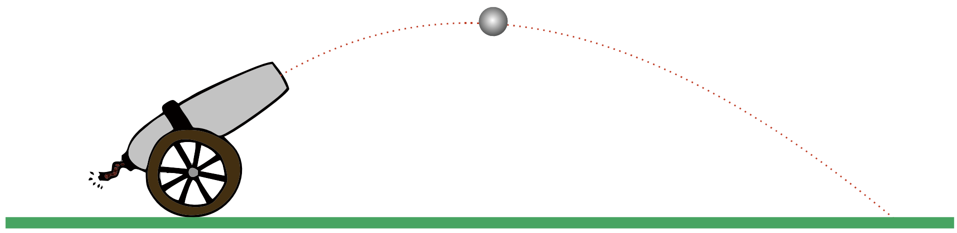


a) Bestem t-værdierne for de punkter, hvor parameterkurven for $\vec{s}'$ skærer en af akserne.

b) Bestem de punkter på parameterkurven for $\vec{s}$, der hører til de i a) fundne t-værdier.

c) Hvilken betydning har det for parameterkurven for $\vec{s}$, når parameterkurven for $\vec{s}'$ skærer akserne?

6.D2.11



En kanonkugle affyres fra en kanon. Kanonkuglens banekurve beskrives ved vektorfunktionen

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} 11{,}2\cdot t \\ -4{,}91\cdot t^2+8{,}43\cdot t+1{,}7 \end{pmatrix},\quad t\geq 0,$$

hvor t er tiden (målt i sekunder) efter affyring af kanonen.

a) Bestem hastighedsvektoren $\vec{v}(t)$.

b) Bestem ved hjælp af $\vec{v}(t)$ den vinkel, som tangenten til kanonkuglens banekurve danner med vandret til det tidspunkt, hvor kanonkuglen affyres.

6.D2.12 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 10\cdot\cos(t) + 5\cdot\cos(-1{,}5\cdot t) \\ 10\cdot\sin(t) + 5\cdot\sin(-1{,}5\cdot t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 4\pi].$$

Farten beregnes som længden af hastighedsvektoren.

a) Bestem farten $|\vec{s}\,'(t)|$ som funktion af tidspunktet *t*.

b) Bestem koordinatsættene for de punkter, hvor farten er henholdsvis størst og mindst i intervallet $t \in [0;\pi[$.

c) Bestem accelerationsvektoren i hvert af punkterne bestemt i b), og tegn disse sammen med banekurven for $\vec{s}$. Giv en fortolkning.

6.D2.13 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

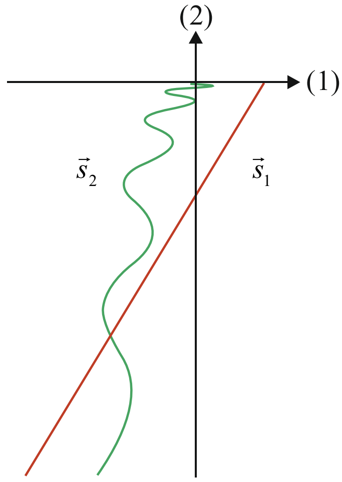
$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} (k\cdot t)^2 + 2 \\ k\cdot t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R},$$

hvor *k* er enten -1 eller 1.

a) Tegn parameterkurven for $\vec{s}$, når $k=-1$, og når $k=1$.

b) Benyt hastighedsfunktionen $\vec{v}$ til at undersøge, hvilken betydning fortegnet for *k* har for den retning parameterkurven gennemløbes i.

6.D2.14 To skiløbere løber ned ad et bjerg. Figuren viser de kurver, som de to skiløbere hver især følger ned ad bjerget. I en model er de to kurver en del af de banekurver, der kan beskrives ved vektorfunktionerne $\vec{s}_1$ og $\vec{s}_2$.



$$\vec{s}_1(t) = \begin{pmatrix} -0,4t + 3,5 \\ -10t \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$$

$$\vec{s}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(3t) - 0,5 \cdot t + 2 \\ -0,01 \cdot t^4 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Pisten stopper 300 m nede ad bjerget.

a) Hvem af skiløberne kommer hurtigst i mål?

Det oplyses, længden af en parameterkurve med koordinatfunktioner x og y samt parameter i $[t_1, t_2]$ kan beregnes ved formlen

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt.$$

b) Bestem længden af hver af de to skiløberes rute.

6.D2.15 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + r \cdot \cos(t) \\ y_0 + r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0;2\pi].$$

Punktet P, der er bestemt ved $\overrightarrow{OP} = \vec{s}(t)$, gennemløber parameterkurven for $\vec{s}$.
Når parameteren t gennemløber intervallet $[t_1, t_2]$, så løber P på randen af et område M, der har et areal. Det oplyses, at arealet af M er givet ved

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \int_{t_1}^{t_2} \vec{s}\,'(t) \cdot \hat{\vec{s}}(t)\, dt \right|.$$

a) Benyt denne formel til at vise, at cirklens areal er givet ved $\pi \cdot r^2$.

6.D2.16 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + a \cdot \cos(t) \\ y_0 + b \cdot \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0;2\pi], \ a > 0, b > 0.$$

Parameterkurven for $\vec{s}$ er en ellipse med centrum i (x_0, y_0). Punktet *P*, der er bestemt ved $\overrightarrow{OP} = \vec{s}(t)$, gennemløber parameterkurven for $\vec{s}$.
Når parameteren *t* gennemløber intervallet $[t_1, t_2]$ så løber *P* på randen af et område *M*, der har et areal. Det oplyses, at arealet af *M* er givet ved

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \int_{t_1}^{t_2} \vec{s}'(t) \cdot \hat{\vec{s}}(t)\, dt \right|.$$

a) Benyt denne formel til at vise, at ellipsens areal er givet ved $\pi \cdot a \cdot b$.

6.D2.17 En vektorfunktion $\vec{s}$ er bestemt ved

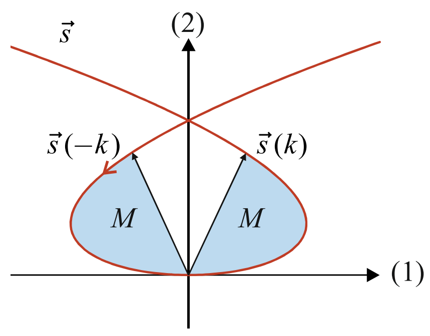
$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}.$$

Linjen *m* er tangent til parameterkurven for $\vec{s}$ til tidspunktet $t = 0$, og linjen *n* er tangent til parameterkurven for $\vec{s}$ til tidspunktet $t = 2$.

a) Bestem skæringspunktet mellem tangenterne *m* og *n*.

6.D2.18 En vektorfunktion $\vec{s}$ er bestemt ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} -t^3 + 3t \\ t^2 \end{pmatrix}, \ t \in \mathrm{R}.$$



a) Bestem $\vec{s}(0)$ og $\vec{s}'(0)$.

b) Argumentér for, at parameterkurven gennemløbes i positiv omløbsretning, når *t* løber fra $-k$ til *k*.

Når parameteren *t* gennemløber intervallet $[-k, k]$ så overstryger stedvektoren $\overrightarrow{OP} = \vec{s}(t)$ et område *M*, der har et areal (se figur). Det oplyses, at arealet af *M* er givet ved

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \int_{-k}^{k} \vec{s}'(t) \cdot \hat{\vec{s}}(t)\, dt \right|.$$

c) Bestem *k*, så arealet af *M* er 6.

6.D2.19 To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0; 2\pi[.$$

Et punkt P er bestemt ved

$$\overrightarrow{OP} = \vec{a} + 2\vec{b}.$$

a) Bestem tallet t, så afstanden fra punktet P til linjen med ligningen $x - 2y + 12 = 0$ er mindst mulig.

6.D2.20 I et koordinatsystem i planen bevæger et punkt P sig, så der til tidspunktet t gælder, at

$$\overrightarrow{OP_t} = \begin{pmatrix} 4t^2 \\ \dfrac{2t-1}{t^2} \end{pmatrix}, \quad t \in [\tfrac{1}{4}; 2].$$

a) Bestem koordinatsættet til hvert af de punkter, hvori banekurven skærer koordinatakserne.

b) Bestem koordinatsættet til hvert af de punkter, hvori banekurvens tangent er parallel med en af koordinatakserne.

c) Bestem vinklen mellem førsteaksen og hastighedsvektoren til tidspunktet $t = \frac{1}{2}$.

6.D2.21 I et koordinatsystem i planen bevæger et punkt P_t sig, så der til tidspunktet t gælder, at

$$\overrightarrow{OP_t} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ t^2 - 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [-4; 4].$$

a) Tegn banekurven for P_t.

Banekurven har et dobbeltpunkt.

b) Bestem vinklen mellem de to hastighedsvektorer i dobbeltpunktet.

6.D2.22 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2+2 \\ 9t-t^3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}.$$

a) Tegn parameterkurven for $\vec{s}$.

Punktet $P(11,0)$ er et dobbeltpunkt på kurven.

b) Bestem gradtallet for den spidse vinkel mellem kurvens to tangenter i *P*.

Kurven har tre tangenter, der hver for sig er parallel med en af koordinatsystemets akser. Disse tre tangenter danner sammen med linjen med ligningen $x = 11$ et rektangel.

c) Bestem arealet af dette rektangel.

6.D2.23 I et koordinatsystem i planen bevæger et punkt *P* sig, så der til tidspunktet *t* gælder, at

$$\overrightarrow{OP_t} = \begin{pmatrix} t^3-3t \\ t^2-4 \end{pmatrix}, \quad -2,25 \le t \le 2,25.$$

a) Bestem koordinatsættet til hvert af de punkter, hvori banekurven skærer en af koordinatakserne.

b) Bestem det tidspunkt, hvor hastighedsvektoren er ensrettet med vektoren $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

6.D2.24 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot (\cos(t))^3 \\ 4 \cdot (\sin(t))^3 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Længden af parameterkurven for $\vec{s}$ kan beregnes ved formlen

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt.$$

a) Bestem kurvens længde.

6.D2.25 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 2+4\cdot\sin(t) \\ 1+2\cdot\cos(t) \end{pmatrix},\quad t\in[0;2\pi],$$

og en linje *m* er givet ved

$$x+2y-16=0.$$

a) Bestem koordinatsættene til hvert af de punkter på banekurven for $\vec{s}$, der har afstanden 6 til linjen *m*.

b) Bestem koordinatsættet til det punkt på banekurven for $\vec{s}$, der har den mindste afstand til linjen *m*.

6.D2.26 I et koordinatsystem i planen bevæger et punkt P_t sig, så der til tidspunktet *t* gælder

$$\overrightarrow{OP_t} = \begin{pmatrix} 4t^2-6t \\ -t^2+4t-3 \end{pmatrix},\quad t\in\mathrm{R}.$$

Banekurven skærer koordinatsystemets førsteakse i to punkter *Q* og *R*, hvor *Q* er punktet med den største førstekoordinat.

a) Bestem koordinatsættet til hvert af punkterne *Q* og *R*.

Tangenten til banekurven i punktet *Q* betegnes med *m*, og tangenten til banekurven i punktet $S(0,-3)$ betegnes med *n*.

b) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem *m* og *n*.

6.D2.27 En stedfunktion er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3-3t+4 \\ -t^2+3 \end{pmatrix},\ t\in\mathrm{R}.$$

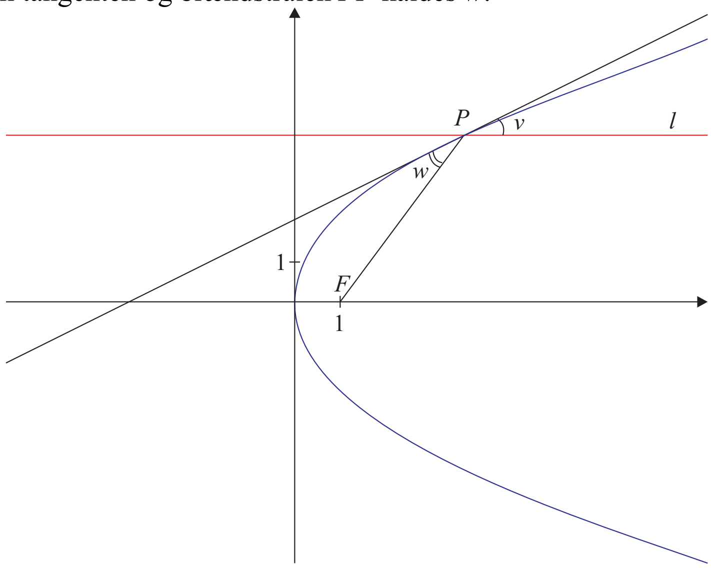
a) Tegn parameterkurven, og bestem koordinatsættet til det punkt på kurven, hvor $t=3$.

b) Bestem koordinatsættet til de punkter på parameterkurven, hvor tangenten til parameterkurven er lodret.

6.D2.28 Parameterkurven for stedfunktionen

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix},\quad t\in \mathbb{R},$$

er en parabel, der er symmetrisk omkring x-aksen som vist på figuren. Punktet $F=(1,0)$ kaldes parablens brændpunkt, og FP kaldes brændstrålen, hvor P er et vilkårligt punkt på parablen. På figuren ses tangenten til grafen i punktet P samt linjen l, der går gennem P og er parallel med x-aksen. Vinklen mellem tangenten og linjen l kaldes v, og vinklen mellem tangenten og brændstrålen FP kaldes w.



a) Bestem v og w, når $P=(4,4)$, og vis, at $v=w$, uanset hvor på parablen P ligger.

6.D2.29 En vektorfunktion er givet ved

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} 2t^2+3t+1 \\ t^2+b\cdot t+6 \end{pmatrix},\quad t\in \mathbb{R},$$

hvor b er en positiv konstant.

a) Undersøg hvilken betydning værdien af b har for antallet af skæringspunkter med koordinatsystemets førsteakse.

Det oplyses, at parameterkurven for $\vec{r}$ går gennem punktet $P(6,10)$.

b) Bestem b.

7. Sandsynlighedsregning og statistik

Delprøve 1

7.D1.1

En stokastisk variabel X er normalfordelt $X \sim N(10,\ 2)$, og F er fordelingsfunktionen for X.

a) Argumentér for, at punkterne $(8, 0.159)$, $(10, 0.5)$ og $(14, 0.977)$ med 3 decimalers nøjagtighed ligger på grafen for F.

b) Skitsér grafen for F.

7.D1.2

En stokastisk variabel X er normalfordelt $X \sim N(5,\ 3)$.

a) Bestem intervallerne for de exceptionelle udfald for X.

b) Bestem intervallet for de normale udfald for X.

c) Bestem $P(X \leq 2)$.

7.D1.3

En stokastisk variabel X er normalfordelt $X \sim N(15,\ 4)$.

a) Opskriv det integral, der bestemmer sandsynligheden $P(X \leq 23)$.

7.D1.4

En stokastisk variabel X er normalfordelt med middelværdi 15 og spredning 4.

a) Bestem $P(X \leq 23)$.

7.D1.5

En stokastisk variabel X er normalfordelt $X \sim N(8,\ 6)$, og f betegner tæthedsfunktionen for X.

a) Forklar, hvad værdien af integralet $\int_{10}^{20} f(x)dx$ fortæller om X.

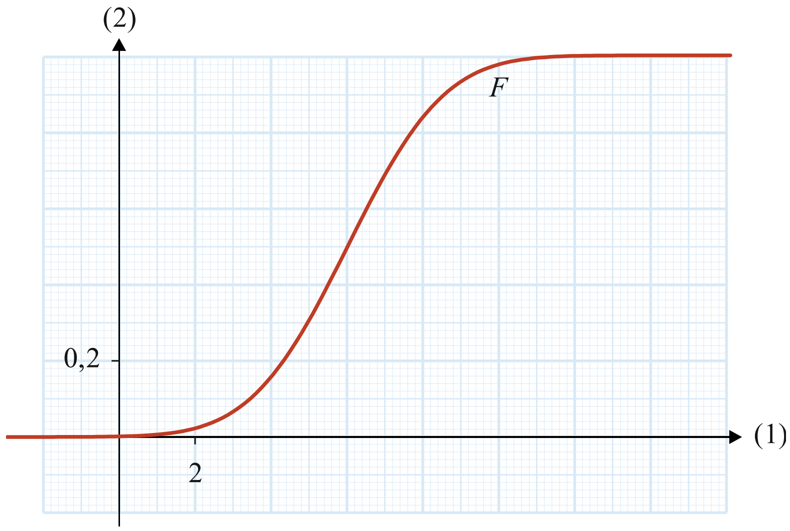
7.D1.6

En stokastisk variabel X er normalfordelt $X \sim N(10,\ 2)$, og f betegner tæthedsfunktionen for X.

Det oplyses, at $\int_{-\infty}^{14} f(x)dx = 0{,}977$.

a) Bestem sandsynligheden $P(10 \leq X \leq 14)$.

7.D1.7 En stokastisk variabel X er normalfordelt $X \sim N(6,\, 2)$. Figuren viser grafen for fordelingsfunktionen F hørende til X.



a) Bestem $P(4 \leq X \leq 9)$.

7.D1.8 Tæthedsfunktionen for en normalfordelt stokastisk variabel er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{32}\cdot(x-5)^2}.$$

a) Bestem middelværdien og spredningen for den normalfordelte stokastiske variabel.

b) Giv et skøn over funktionsværdien $f(5)$.

c) Skitsér grafen for tæthedsfunktionen f.

7.D1.9 En stikprøve fra en population er givet ved

4, 6, 3, 7, 10.

a) Bestem middelværdi og spredning i populationen ud fra stikprøven.

Delprøve 2

7.D2.1 En normalfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim N(10,4)$. Fordelingsfunktion for X betegnes F.

a) Tegn grafen for tæthedsfunktionen f for X.

b) Bestem $F(7)$, og forklar betydningen af dette tal.

7.D2.2 En normalfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim N(5,7)$.

a) Tegn grafen for fordelingsfunktionen F for X.

b) Løs ligningen $F(x) = 0{,}8$.

7.D2.3 En normalfordelt stokastisk variabel X er givet med positiv middelværdi k og spredning 3.

a) Bestem k, når tæthedsfunktionen f opfylder, at $f(1) = 0{,}05$.

7.D2.4 En normalfordelt stokastisk variabel X er givet med middelværdi 15 og spredning k.

a) Bestem k, når fordelingsfunktionen F opfylder, at $F(6) = 0{,}1$.

7.D2.5 Om en normalfordelt stokastisk variabel X oplyses, at $P(X \leq 10) = 0{,}25$ samt at $P(X \leq 20) = 0{,}75$.

a) Bestem middelværdi og spredning for X.

7.D2.6 En stokastisk variabel X er binomialfordelt, $X \sim b(60,\, 0.7)$. Middelværdi og spredning for X betegnes μ og σ.

a) Bestem $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$.

b) Bestem den mindst mulige værdi af k, så $P(X \leq k) > 0{,}40$.

7.D2.7 En stokastisk variabel X er binomialfordelt, $X \sim b(40,\ 0.2)$. Middelværdi og spredning for X betegnes μ og σ.

a) Bestem $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$.

b) Bestem den størst mulige værdi af k, så $P(X \geq k) > 0,40$.

7.D2.8

Foto: Freepik.com

Et bryggeri har en maskine, der fylder læskedrik på flasker. Maskinen er indstillet, så den mængde læskedrik, der fyldes i en flaske, er normalfordelt med middelværdi 505 mL og spredning 3 mL.

a) Bestem sandsynligheden for, at en tilfældigt valgt flaske med læskedrik indeholder mindst 500 mL læskedrik.

Der udtages tilfældigt 30 flasker med læskedrik ud af en dags produktion.

b) Bestem sandsynligheden for, at alle de 30 udtagne flasker indeholder mindst 500 mL læskedrik.

7.D2.9 Tabellen viser sammenhørende værdier for arbejdsløshedsraten og inflationsraten i USA.

Arbejdsløshedsraten	4	4,7	…	4,9	4,4
Inflationsraten	3,4	2,8	…	1,3	2,1

(*Hele datasættet ligger i bilaget philip.xlsx*)

I en model antages det, at sammenhængen mellem arbejdsløshedsraten og inflationsraten i USA kan beskrives ved

$$f(x) = a \cdot x + b\,,$$

hvor $f(x)$ betegner inflationsraten (målt i %), og x betegner arbejdsløshedsraten (målt i %).

a) Benyt tabellens data til at bestemme a og b.

b) Bestem et 95% konfidensinterval for a, og benyt dette til at afgøre om sammenhængen mellem arbejdsløshedsraten og inflationsraten er aftagende.

7.D2.10

I en stikprøve bestående af n personer svarer 15% ja til et spørgsmål.

Bredden af et 95% konfidensinterval for andelen af ja-svar er givet ved

$$4 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}\,.$$

a) Bestem n, så bredden af 95% konfidensintervallet er tættest på 0,07.

b) Bestem hvor meget bredden af 95% konfidensintervallet ændrer sig, hvis der spørges 10 gange så mange personer og andelen af ja-svar er uændret.

7.D2.11

Tabellen viser et udsnit af et datasæt

5,24	1,66	…	0,638	6,21

(Hele datasættet ligger i bilaget "Tilfældigetal.xlsx")

a) Undersøg, om data i tabellen er normalfordelte.

7.D2.12

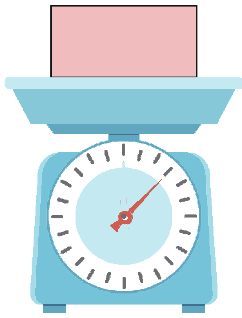
I en population er individernes Body Mass Index (BMI) normalfordelt med middelværdien 23,7 kg/m^2 og en spredning på 3,7 kg/m^2.

a) Bestem en forskrift for tæthedsfunktionen for fordelingen af individernes BMI i populationen.

b) Bestem sandsynligheden for, at et individs BMI er mellem 25 kg/m^2 og 28 kg/m^2.

c) Bestem de exceptionelle udfald for individernes BMI.

7.D2.14



Grafik: freepik.com

I et firma har man lavet kontrolvejninger af varerne i en stikprøve fra en produktion af et af firmaets produkter. Tabellen herunder viser resultatet af vejningerne.

Vægt (gram)	50,1	51,6	…	49,4	50,1

(*Hele tabellen findes i bilaget "Vægt af en vare"*)

a) Gør rede for, at vægten af varerne med god tilnærmelse kan beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X.

b) Bestem middelværdi og spredning for X.

Firmaet udtager nu en ekstra vare fra samme produktion til vejning.

c) Bestem sandsynligheden for, at denne vare vejer mere end 51 gram.

7.D2.15

I en skobutik har man gennem en periode målt længderne på kundernes sko. Tabellen herunder viser resultaterne af målingerne

Længde (cm)	31,4	18,4	…	29,9	29,9

(*Hele tabellen findes i bilaget "Skolængder"*)

a) Benyt tabellens data til at gør rede for, at skolængderne ikke kan beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel.