UNDERVISNINGS
MINISTERIET
STYRELSEN FOR
UNDERVISNING OG KVALITET

Vejledende Enkeltopgaver

Matematik stx B-niveau

Marts 2020

Indhold

Forord

Grundlaget for de skriftlige prøver i matematik B er beskrevet gennem henholdsvis læreplan, undervisningsvejledning og de vejledende og de stillede opgavesæt ved de skriftlige prøver. I læreplanen hedder det om den skriftlige prøve:

"*Den skriftlige prøve*
Grundlaget for den skriftlige prøve er et todelt centralt stillet opgavesæt, som udleveres ved prøven. Prøvens varighed er fire timer.
Det skriftlige opgavesæt består af opgaver stillet inden for kernestoffet. Der indgår i opgavesættet problemstillinger, der tager udgangspunkt i eksaminandernes centrale studieretningens fag.
Prøven er todelt. Ved første delprøve må der ikke benyttes andre hjælpemidler end en centralt udmeldt formelsamling. Efter udløbet af første delprøve afleveres besvarelsen heraf.
Opgaverne til anden delprøve udarbejdes ud fra den forudsætning, at eksaminanden råder over et matematisk værktøjsprogram jf. pkt. 3.3."

Af undervisningsvejledningen fremgår *tidsrammen for den skriftlige prøve*:
"Den skriftlige prøve er centralt stillet og består af to delprøver, hvor delprøve 1 varer 1½ time, og delprøve 2 varer 2½ time. Opgavesættet består i begge delprøver af opgaver stillet inden for kernestoffet."
De faglige mål, kernestof og mindstekrav samt bedømmelseskriterierne ved de afsluttende prøver findes ligeledes beskrevet i læreplanen. Denne udgivelse af vejledende enkeltopgaver kan ikke træde i stedet for læreplan og undervisningsvejledning, men skal alene ses som et supplerende materiale til støtte for undervisningen frem mod de skriftlige prøver. Gennem det skriftlige arbejde skal eleverne opnå fortrolighed med den centralt udmeldte formelsamling, som kan hentes via uvm.dk, hvor den ligger sammen med læreplan og undervisningsvejledning. Eleverne skal have adgang til en *'ren' udgave af formelsamlingen under delprøve 1* ved de skriftlige prøver.

Opgavesamlingen er ligesom de vejledende opgavesæt udarbejdet af opgavekommissionen, og opgaverne viser, hvordan både nye og gamle emner kan komme til udtryk i henhold til 2017-læreplanen. Opgavesamlingen udgør *ikke en udtømmende* beskrivelse af de opgavetyper, der kan og vil blive stillet ved de kommende skriftlige prøver, men repræsenterer er række forskelligartede måder, hvorpå et emne kan optræde i opgaver ved den skriftlige prøve. Antallet af opgaver inden for et bestemt emne er *ikke udtryk for en vægtning af pågældende emne*. Opgavesamlingen er heller *ikke et udtryk for forholdet mellem lette og svære opgaver* i et prøvesæt, fx er mindstekravsopgaver ikke markeret, og de er ikke repræsenteret i det omfang, der er krav om i et opgavesæt stillet til den skriftlige prøve. De *vejledende eksempler på mindstekravsopgaver* findes på EMU under STX, Matematik, Prøver og eksamen.

I opgavesamlingen findes en række opgaver med spørgsmål, hvori der indgå en deskriptiv statistisk undersøgelse af residualerne fremkommet ved modellering med lineær regression. Disse opgaver stilles ikke ved de skriftlige prøver ved sommerterminen 2019, men vil kunne indgå i de kommende eksamensterminers prøvesæt. Opgaverne repræsenterer en anvendelse af den deskriptive statistik (hørende til C-niveau) på B-niveau-stof.

I undervisningsvejledningen hedder det i øvrigt om *læreplanen og lærebøger*:
"Læreplanen beskriver fagets indhold, arbejdsformer og redskaber. Undervisningsvejledningen folder læreplanens intentioner ud og operationaliserer sammen med de skriftlige eksamensopgavesæt læreplanens beskrivelse af kernestoffet.
Lærebogen derimod er de aktuelle forfatteres fortolkning af læreplanens formuleringer. Det er derfor helt centralt, at man som lærer orienterer sig i forskellige lærebøger, diskuterer disses forskellige udlægninger af læreplanens indhold med kolleger og på den baggrund skaber et solidt grundlag for implementering af læreplanens krav."

Formulering af eksamensopgaverne

Af undervisningsvejledningens afsnit 4.2 fremgår retningslinjerne for den skriftlige prøve på B-niveau:
"Ved delprøve 1 er eneste tilladte hjælpemiddel den centralt udmeldte formelsamling (ren, dvs. uden tilføjelser) til det aktuelle matematikniveau. Ved delprøve 2 må eksaminanden benytte alle hjælpemidler (bortset fra kommunikation med omverdenen), og opgaverne til denne del af prøven vil i forskelligt omfang kræve, at eksaminanden behersker et matematisk værktøjsprogram, der lever op til beskrivelsen i læreplanens afsnit 3.3.

Eksaminanderne får adgang til begge delprøver ved prøvens start, men må først tage yderligere hjælpemidler frem, når tiden til delprøve 1 er udløbet, og alle eksaminander har afleveret deres besvarelser af delprøve 1. Der kan i særlige tilfælde i enkelte opgaver forekomme emner og problemstillinger, der ikke direkte er beskrevet i kernestoffet, og i sådanne tilfælde vil grundlaget for besvarelsen klart fremgå af opgaveformuleringen. Det kan fx være tilfældet i forbindelse med opgaver, der omhandler matematisk modellering, hvor der kan optræde funktionsudtryk, som eksaminanderne forventes at kunne håndtere med brug af et matematisk værktøjsprogram med CAS.

Hovedparten af opgaverne i det samlede opgavesæt tager udgangspunkt i det aktuelle matematikniveau (B-niveau) med inddragelse af elementer fra stofområdets behandling på det underliggende niveau (C-niveau) og med en niveausvarende taksonomi. Fx kan inddragelse af en parameter i en given formel være med til at løfte opgaven fra et regneteknisk niveau til et ræsonnerende niveau. Der kan også forekomme opgaver, der tager direkte udgangspunkt i stof hørende til det underliggende niveau (C-niveau), hvor problemstillingen dog er af en sådan karakter, at det kræver et abstraktionsniveau hørende til det aktuelle matematikniveau (B- niveau).

En del af opgaverne i hver af de to delprøver indeholder tydeligt markerede spørgsmål, der er knyttet til afprøvning af mindstekravene på det aktuelle niveau (jf. afsnit 2.2). De markerede mindstekravsspørgsmål dækker tilsammen ca. 125% af det pointtal, der i det forelagte opgavesæt kræves for at opnå karakteren 02. Opgaverne involverer forskellige typer af mindstekravskategorier, der tilsammen beskriver det netop acceptable faglige niveau ved den aktuelle prøve i det forelagte opgavesæt.

Brug af formuleringer som 'løs ligningen', 'bestem nulpunkter' eller 'bestem skæringspunkter mellem to grafer' er ikke udtryk for, at der ønskes en bestemt fremgangsmåde. Hvis der er krav om en bestemt løsningsmetode, så vil det fremgå af opgaveformuleringen. I delprøve 1 begrænses svarmulighederne naturligt af, at elevernes eneste hjælpemiddel er en formelsamling. I delprøve 2 skelnes der mellem 'beregning' og 'aflæsning'. I delprøve 2 betyder en formulering som 'Bestem ved beregning…' eller 'Beregn…', at et korrekt svar skal baseres på en algebraisk beregning med et formeludtryk i kombination med en CAS-kommando (fx 'solve'), mens formuleringen 'Bestem ved aflæsning…' eller "Aflæs…" betyder, at et korrekt svar skal baseres på en præcis aflæsning med en dertil indbygget kommando på en grafisk eller en geometrisk repræsentation frembragt i et matematisk værktøjsprogram. I alle andre opgaver vil der være frit valg med hensyn til metode. Det er en del af undervisningen, at eleverne opnår indsigt i styrker og svagheder ved forskellige løsningsstrategier med og uden matematiske værktøjsprogrammer, herunder symbolske, numeriske og grafiske metoder til løsning af ligninger og andre matematiske problemer. Det forventes desuden, at eleverne opnår indsigt i, hvorledes man i opgaver, hvor det er relevant, kan argumentere ved hjælp af den afledede funktion. Formålet er, at eleverne bliver i stand til at vurdere hensigtsmæssigheden ved en given løsningsmetode samt at finde andre veje frem, hvis en bestemt løsningsstrategi slår fejl, fx i de tilfælde, hvor eksaminandens matematiske værktøjsprogram giver et uventet svar.

Det forventes, at eksaminanderne kan opstille modeller ved regression, men det forventes ikke, at de kan begrunde én bestemt model frem for andre.

Ordene 'skitse' og 'tegn' bruges forskelligt. Hvilke detaljer, der bør medtages i en 'skitse', afhænger af det konkrete spørgsmål, og det er en del af undervisningen, at eleverne lærer at afkode, hvilke oplysninger der er nødvendige at medtage i den aktuelle situation. Når der bliver bedt om en tegning af en graf, et grafisk forløb eller en modeltegning af en geometrisk situation, så forventes eleverne at medtage de karakteristiske egenskaber ved de objekter, der indgår, herunder hensigtsmæssigt grafvindue og størrelsesforhold.
Når der i en opgave omhandlende geometrisk modellering indgår, at en geometrisk figur på passende vis skal indlægges (indtegnes) i et koordinatsystem, så skal de mål, der er oplyst, anvendes med en sådan præcision at koordinatsættene til relevante punkter i modellen kan aflæses og anvendes i de videre beregninger i relation til modellen.
Hvis der i en opgave stilles krav om, at en graf for en funktion skal tegnes i et bestemt udsnit af koordinatsystemet, så vil det ønskede grafvindue være angivet som et interval for hver af de variable eller på mængdeproduktform $[-10;10]\times[-10;10]$.
Et ekstremumspunkt angives som et punkt i det todimensionale koordinatsystem repræsenteret ved begge koordinater. Førstekoordinaten repræsenterer ekstremumsstedet (maksimums- eller minimumssted), mens andenkoordinaten repræsenterer funktionens ekstremum (maksimum eller minimum).

Der kan forekomme bilag til opgavesættet i form af regneark med data, som eksaminanderne forventes at kunne importere til videre bearbejdning i deres eget matematiske værktøjsprogram. Der anvendes som standard dansk decimalkomma (fx 1,53 og ikke 1.53), og det er en del af undervisningen, at eleverne lærer at importere data i forskellige formater.
I særlige tilfælde, hvor det danske komma vil give anledning til misforståelser, som fx ved angivelse af koordinater, vil der optræde decimalpunktum. Tilsvarende hvis en autentisk kilde el.lign. benytter decimalpunktum, så vil denne notation ikke blive ændret i gengivelsen i opgavesættet.
De vejledende opgavesæt og de stillede prøvesæt illustrerer dels omfang og opbygning af opgavesæt, dels hvorledes den konkrete udformning af forskellige spørgsmål kan være, herunder hvordan 'spor' hentet fra niveauets kernestof indgår i opgaver i anden delprøve ('spor' kan ikke forekomme i første delprøve). De stillede opgavesæt er dog ikke definerende for det pågældende niveau. Alle prøvesæt (inkl. de vejledende) findes på Materialeplatformen."

Bedømmelse af opgavebesvarelsen

I undervisningsvejledningens afsnit 4.3 beskrives, hvad der lægges vægt på i bedømmelsen:
"Vægtningen af hver af de to delprøver i det todelte centralt stillede opgavesæt svarer til forholdet mellem det samlede pointtal, der kan opnås, i hver af de to delprøver. I ekstreme tilfælde, hvor en eksaminand præsterer højt niveau i den ene delprøve og intet eller meget lavt niveau i den anden delprøve, vurderes, hvorvidt eksaminandens præstation på det foreliggende grundlag lever op til de faglige mål, hvor der indgår både færdigheder og kompetencer dels uden og dels med brug af et matematisk værktøjsprogram.
Vægtningen af de enkelte opgaver i hver af de to delprøver fremgår af opgavesættet. Hver opgave indeholder ét eller flere spørgsmål. Et spørgsmål kan indeholde delspørgsmål."

Et samlet opgavesæt indeholder spørgsmål, der samlet set summerer op til 200 point. Fordelingen af de 200 point mellem de to delprøver er 80 point i delprøve 1 og 120 point i delprøve 2. Af de vejledende opgavesæt fremgår det, at spørgsmålene indgår med forskellig vægt. Det enkelte spørgsmål tildeles enten 5 eller 10 point. Spørgsmål hørende til mindstekravene er fordelt mellem de to delprøver med ca. 30-35 point i delprøve 1 og ca. 45-50 point i delprøve 2.

Af undervisningsvejledningens afsnit 4.3 fremgår det endvidere om mindstekravene:
"En fuld besvarelse af ca. 80% af samtlige mindstekravsopgaver i et opgavesæt resulterer i karakteren 02. Besvarer eksaminanden yderligere andre opgaver i opgavesættet korrekt, tæller disse besvarelser positivt med frem mod en højere karakter. En eksaminand kan også opnå karakteren 02 ved korrekt besvarelse af tilfældigt udvalgte opgaver, der tilsammen indgår med samme vægt som ca. 80% af mindstekravsopgaverne i

opgavesættet."

Af undervisningsvejledningens afsnit 4.3 fremgår det yderligere om helhedsvurdering:
Bedømmelsen af eksaminandens samlede besvarelse af den skriftlige prøve tager udgangspunkt i en overordnet vurdering af besvarelsen som helhed, hvor der lægges særlig vægt på matematisk korrekthed, men også på om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen.
Der lægges særlig vægt på, om eksaminanden:

- mestrer mindstekravene, dvs. de grundlæggende matematiske færdigheder og kompetencer med og uden matematiske værktøjsprogrammer.
- kan håndtere matematisk symbolsprog og operere med matematiske begreber.
- kan anvende matematisk teori og matematiske metoder til modellering og løsning af forelagte problemer.
- kan redegøre for forelagte matematiske modeller og diskutere deres rækkevidde og inddrage relevante usikkerhedsbetragtninger.
- kan præsentere en løsning af et matematisk problem på en klar og overskuelig måde.
- behersker matematiske værktøjsprogrammer til bearbejdning af forelagte matematiske problemer."

Kravene til helhedsindtrykket ved besvarelse af opgaver i delprøve 1 og delprøve 2 er lidt forskellige, idet fx angivelse af mellemregninger giver god mening i besvarelse af opgaver i delprøve 1, men sjældent i besvarelser af opgaver i delprøve 2 med brug af matematiske værktøjsprogrammer, hvor der i stedet er krav om, at eksaminanden dokumenterer sine matematiske overvejelser i brugen af programmets faciliteter. Til gengæld er der behov for forklaringer og henvisninger til diverse grafer og figurer i besvarelser af opgaver ved begge delprøver.

Ved bedømmelsen af helhedsindtrykket af besvarelse af de enkelte opgaver lægges særlig vægt på følgende fire punkter:

- *Redegørelse og dokumentation for metode*
  Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte løsningsstrategi med dokumentation i form af et passende antal mellemregninger eller matematiske forklaringer på metoden, når et matematisk værktøjsprogram anvendes.
- *Figurer, grafer og andre illustrationer*
  Besvarelsen skal indeholde hensigtsmæssig brug af figurer, grafer og andre illustrationer, og der skal være tydelige henvisninger til brug af disse i den forklarende tekst.
- *Notation og layout*
  Besvarelsen skal i overensstemmelse med god matematisk skik opstilles med hensigtsmæssig brug af symbolsprog. Hvis der anvendes matematisk notation, der ikke kan henføres til standardviden, skal der redegøres for betydningen.
- *Formidling og forklaring*
  Besvarelsen af rene matematikopgaver skal indeholde en angivelse af givne oplysninger og korte forklaringer knyttet til den anvendte løsningsstrategi beskrevet med brug af almindelig matematisk notation. Besvarelsen af opgaver, der omhandler matematiske modeller, skal indeholde en kort præsentationen af modellens kontekst, herunder betydning af modellens parametre. De enkelte delspørgsmål skal afsluttes med en præcis konklusion præsenteret i et klart sprog i relation til konteksten.

Specielt med henblik på kategorien formidling og forklaring bemærkes, at ordet "parametre" omfatter både de variable og konstanterne i en model. Formuleringer som "Indfør passende variable…" betyder, at eleven skal vælge variabelbetegnelser og forklare, hvad hver af de variable beskriver i den aktuelle kontekst. Formuleringer som "Gør rede for, hvad tallene fortæller om…" hentyder til, at eleverne skal forklare, hvad

modellens konstanter betyder i den aktuelle kontekst. I modelleringsopgaver, hvor eleverne fx bliver bedt om at præsentere et punktplot, residualplot eller en graf, er er der ikke krav om en konklusion.
I besvarelsesprocessen kan det være hensigtsmæssigt for nogle elever at kopiere opgaveformuleringer fra den digitale version af opgavesættet ind i besvarelsen, som typisk udfærdiges i et matematisk værktøjsprogram. Det anbefales dog, at eleverne uddrager den nødvendige information for besvarelse af opgaven (og derefter eventuelt sletter udklippet), så det sikres, at opgavebesvarelsen fremstår som en helhed, og elevens tankegang fremgår klart."

Karakterfastsættelsen

Karakteren fastsættes på baggrund af den samlede bedømmelse, som altid en *vurdering af, i hvilket omfang eksaminandens præstation lever op til de relevante faglige mål*, som er angivet i læreplanens afsnit 2.1. Som nævnt oven for vurderes elevens besvarelse med henblik på de nævnte specifikke matematiske kompetencer, og i en karakterfastsættelse inddrages de *kategorier, der er relevante for pågældende prøvesæt*.

Når der *afgives karakterer*, er det vigtigt at kende karakterbekendtgørelsens bestemmelser og beskrivelser af de enkelte karakterer. Karakteren er ét tal og ikke en udtalelse, og karakterskalaen består kun af ganske få tal. Derfor vil den enkelte karakter altid rumme en vis kompleksitet. Som bilag til undervisningsvejledningen findes karakterbeskrivelser, der i skematisk form viser, hvorledes 7-trinsskalaens terminologi kan knyttes sammen med de faglige mål for skriftlig matematik på B-niveau.

Bodil Bruun, fagkonsulent, 2019

1. Tal, ligninger og formler

Delprøve 1

1.D1.1

a) Reducér udtrykket

$$(a-b)\cdot(a+b)-2a^2+b^2.$$

1.D1.2

a) Reducér udtrykket

$$(p+q)^2+2p\cdot(p-q).$$

1.D1.3

a) Reducér udtrykket

$$(p-q)^2+2p\cdot q-q^2.$$

1.D1.4

a) Reducér udtrykket

$$a^2+2a\cdot b-(a+b)^2.$$

1.D1.5

a) Reducér udtrykket

$$\frac{x^2+2x}{x}.$$

1.D1.6

a) Reducer udtrykket

$$(a+b)^2+2(b^2-ab).$$

1.D1.7

a) Forklar linje for linje nedenstående reduktion af et udtryk

$\dfrac{3x^2+6x}{x+2}$	udtrykket skrives op
$=\dfrac{3x\cdot(x+2)}{x+2}$	
$=3x$	

1.D1.8

a) Reducér udtrykket

$$T^2-K^2+(T+K)^2-2KT.$$

1.D1.9

a) Reducér udtrykket

$$\left(x+5\right)^2-25\ .$$

1.D1.10

a) Isolér x i ligningen

$$\sqrt{2x+3}=5.$$

1.D1.11

a) Isolér h i ligningen

$$\frac{p\cdot h}{4}=4M.$$

1.D1.12

a) Isolér h i formlen

$$\frac{h}{2}-10=M.$$

1.D1.13

a) Isolér y i ligningen

$$-15x+5y-45=0\ .$$

1.D1.14

a) Isolér y i ligningen

$$\frac{4}{y} = 2\,.$$

1.D1.15

En andengradsligning er givet ved

$$x^2 - 7x + 10 = 0.$$

a) Bestem diskriminanten d, og beskriv, hvad værdien af d fortæller om antallet af løsninger til ligningen.

1.D1.16

a) Bestem tallet k, så andengradsligningen

$$2x^2 - 4x + k = 0$$

har netop én løsning.

1.D1.17

Linjerne l og m er givet ved ligningerne

$$\begin{aligned} l:&\quad 2x - 3y = 1 \\ m:&\quad x + 6y = 8. \end{aligned}$$

a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem l og m.

1.D1.18

a) Løs andengradsligningen

$$(x+3)^2 - 1 = 0.$$

1.D1.19

a) Løs andengradsligningen

$$2\cdot(x+1)^2 - 8 = 0.$$

1.D1.20

a) Løs andengradsligningen

$$3x^2 - 18x + 15 = 0.$$

1.D1.21

En andengradsligning er givet ved

$$x^2 + b \cdot x + 36 = 0.$$

a) Løs andengradsligningen, når $b = 13$.

b) Bestem de værdier af b, for hvilke andengradsligningen har netop én løsning.

1.D1.22

a) Bestem tallet k, så andengradsligningen

$$2x^2 - 3x + k = 0$$

har netop én løsning.

1.D1.23

a) Bestem tallet a, så andengradsligningen $a \cdot x^2 - 40 \cdot x + 10 = 0$ har netop én løsning.

1.D1.24

a) Undersøg, om $x = 3$ er en løsning til ligningen

$$x^3 - 9 \cdot x^2 + 23 \cdot x - 15 = 0 .$$

1.D1.25

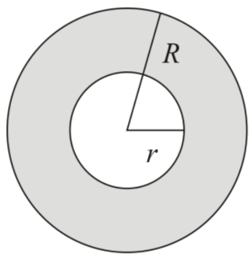
For en kugle med radius r og volumen V gælder, at $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$.
En bestemt kugle har rumfanget $\frac{32}{3} \cdot \pi$.

a) Bestem radius for denne kugle.

1.D1.26

På figuren ses to cirkler. Den lille cirkel har radius r, mens den store cirkel har radius R.
Det oplyses, at $R = 13$ og at arealet af det skraverede område er 144π .

a) Bestem den lille cirkels radius r.

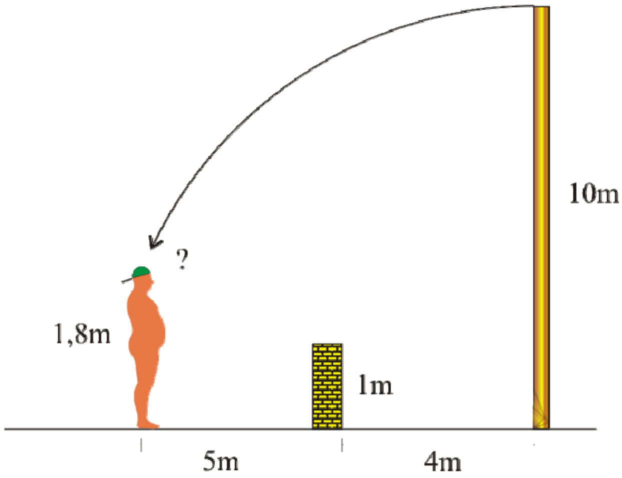


Størrelsesforholdene er ikke korrekte

1.D1.27

En 1,8 m høj mand står 5 m fra en 1 m høj mur. Fra muren er der 4 m til en 10 m høj flagstang, der er fastgjort med et hængsel ved jordoverfladen (se figur). Flagstangen vælter, så den kommer til at hvile på muren.

a) Bliver manden ramt af flagstangen?



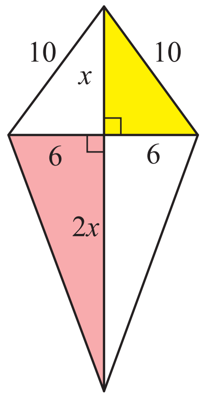
Størrelsesforholdene er ikke korrekte

1.D1.28

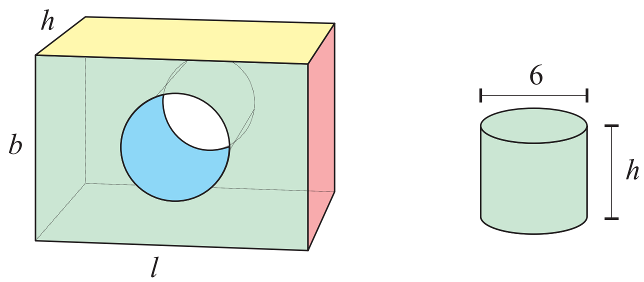
En drage er sammensat af fire retvinklede trekanter, så den er symmetrisk om sin egen længdeakse (se figur).

a) Bestem x.

b) Bestem dragens areal.



1.D1.29



I en træklods med længde l, bredde b og højde h er der udskåret en cylinder med diameter 6, som vist på figuren (alle mål i cm).

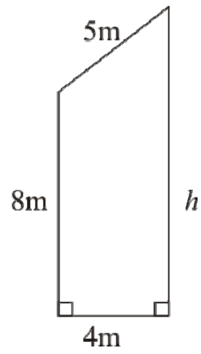
a) Bestem volumen af træet i klodsen udtrykt ved l, b og h, når cylinderen er udskåret.

1.D1.30

Figuren viser gavlen af et hus. Nogle af husets mål er angivet på figuren.

a) Bestem højden h af gavlen.

b) Bestem gavlens areal.



Delprøve 2

1.D2.1 I 2001 fandt amerikanske og canadiske forskere, at sammenhængen mellem den oplevede temperatur og den aktuelle temperatur ved forskellige vindhastigheder, det såkaldte "windchill index", kan beskrives ved

$$w = 13{,}3 + 0{,}62 \cdot t - 13{,}95 \cdot v^{0{,}16} + 0{,}486 \cdot t \cdot v^{0{,}16} \,,$$

hvor w er "windchill index" (målt i $°\mathrm{C}$), t er den aktuelle målte temperatur (målt i $°\mathrm{C}$), og v er vindhastigheden (målt i m/s).

a) Bestem "windchill index", når den aktuelle temperatur er $-5°\mathrm{C}$, og vindhastigheden er 20 m/s.

b) Bestem den vindhastighed, der ved en temperatur på $-3°\mathrm{C}$ giver et "windchill index" på $-10°\mathrm{C}$.

Kilde: www.dmi.dk

1.D2.2

Foto: www.colourbox.dk

Tabellen viser prisindekset for prisen på frisk mælk ved starten af årene 2010 og 2019. Basisåret er 2015.

Årstal	2010	2019
Indeks	91,1	129,7

Det oplyses, at en bestemt liter frisk mælk i 2010 kostede 9 kr.

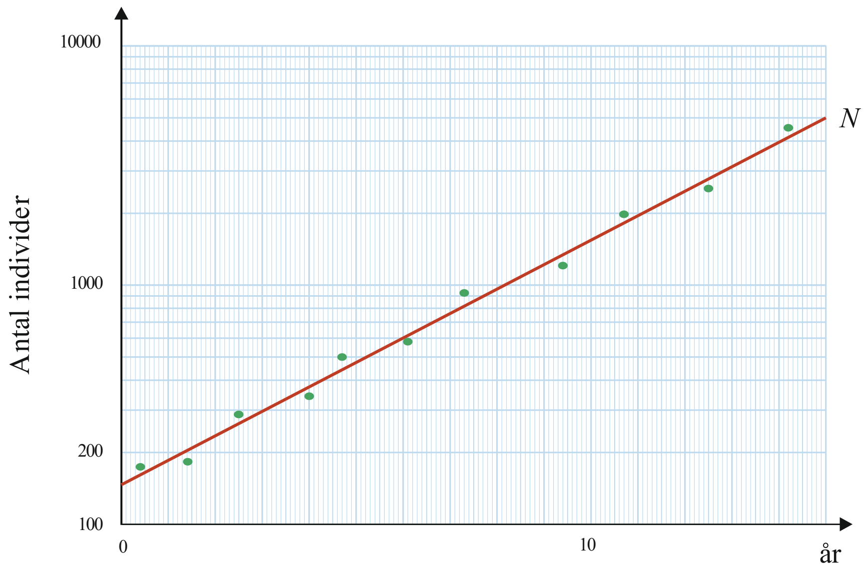
a) Bestem prisen for en tilsvarende liter frisk mælk i 2019.

I det følgende antages det, at udviklingen i prisen på frisk mælk vokser eksponentielt i perioden 2010 – 2019.

b) Bestem den gennemsnitlige årlige procentvise stigning i prisen på frisk mælk i perioden 2010 – 2019.

c) Indfør passende variable, og opstil en model, der beskriver udviklingen i prisen på en liter frisk mælk i perioden 2010 – 2019.

1.D2.3



Over en periode har man observeret udviklingen i antallet af individer i en bestemt population af dyr. I en model kan udviklingen beskrives ved en funktion *N*, hvor $N(t)$ betegner antallet af individer i populationen til tidspunktet *t* (målt i år).
På figuren ses et enkeltlogaritmisk plot af observationerne sammen med grafen for *N*.

Det oplyses, at $N(3) = 300$ og $N(14) = 4000$.

a) Bestem en forskrift for *N*.

b) Benyt modellen til at bestemme fordoblingstiden for antallet af individer i populationen.

2. Funktioner og differentialregning

Delprøve 1

2.D1.1

En funktion *f* er givet ved

$$f(x)=\begin{cases} 2^x & 0\le x<4 \\ 0,5x+14 & 4\le x. \end{cases}$$

a) Undersøg om punktet $P(3,8)$ ligger på grafen for *f*.

2.D1.2

To funktioner *f* og *g* er givet ved

$$f(x)=x+2 \text{ og } g(x)=\sqrt{x}.$$

a) Bestem $g(f(2))$.

2.D1.3

Om to funktioner *f* og *g* oplyses at

x	0	1	2
$f(x)$	-1	0	1

x	0	1	2
$g(x)$	2	3	6

a) Bestem $g(f(1))$.

2.D1.4

To funktioner *f* og *g* er givet ved

$$f(x)=x^2 \text{ og } g(x)=x+1.$$

a) Tegn grafen for $f(g(x))$.

2.D1.5

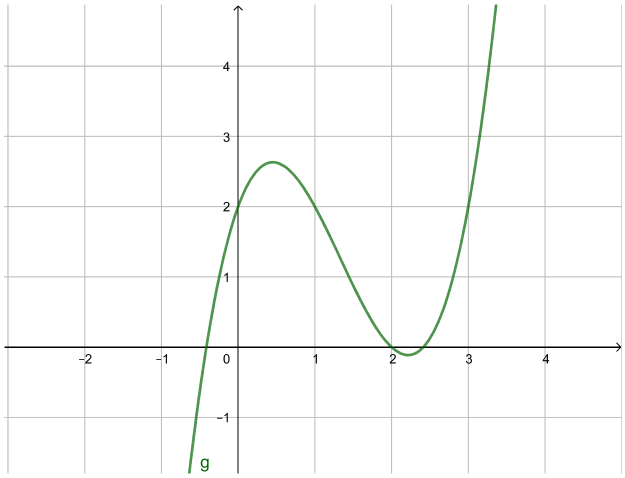
En sammensat funktion $h(x)=f(g(x))$ er givet ved

$$h(x)=\ln(2x+4), \quad x>-2.$$

a) Bestem forskriften for hver af de to funktioner *f* og *g*, så $h(x)=f(g(x))$.

2.D1.6

På figuren ses grafen for funktionen g.

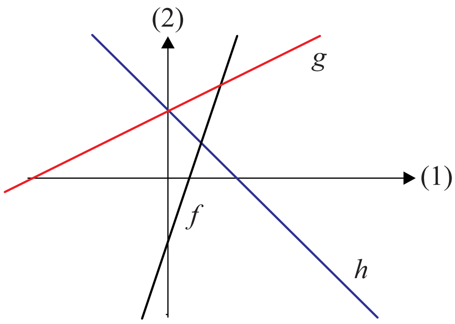


Funktionen f er bestemt ved

$$f(x)=3x-7.$$

a) Bestem $f(g(3))$.

2.D1.7



På figuren ses graferne for tre lineære funktioner f, g og h.

a) Opskriv en mulig forskrift for hver af de tre funktioner.

2.D1.8

Grafen for en eksponentialfunktion $f(x)=b\cdot a^x$ går gennem to punkter, som fremgår af tabellen

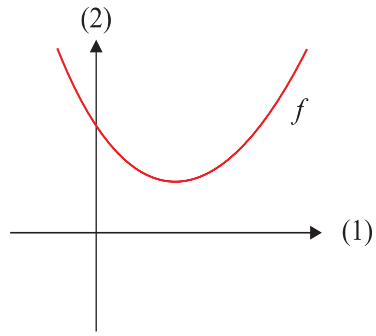
x	5	8
$f(x)$	$7\cdot k$	$56\cdot k$

Det oplyses, at k er et positivt tal.

a) Bestem konstanten a, og bestem konstanten b udtrykt ved k.

b) Bestem k, når det oplyses, at punktet $C(0,14)$ ligger på grafen for f.

2.D1.9



På figuren ses en parabel, der er graf for en funktion f, som er givet ved

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \ .$$

a) Argumentér for fortegnet for hver af konstanterne a, b, c og diskriminanten d.

2.D1.10

Et andengradspolynomium p har rødderne $x_1 = 4$ og $x_2 = 9$.

a) Opskriv en mulig forskrift for p.

2.D1.11

Et andengradspolynomium p er givet ved

$$p(x) = -5(x+1) \cdot (x-11).$$

a) Bestem andengradspolynomiets rødder.

2.D1.12

Et andengradspolynomium q er givet ved

$$q(x) = 7(x^2 - x + 2).$$

a) Bestem konstanterne a, b og c, når q skrives på formen $q(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

2.D1.13

Et andengradspolynomium p er bestemt ved

$$p(x) = 3 \cdot (x+5) \cdot (x+7) \ .$$

a) Bestem konstanterne a, b og c, når p skrives på formen $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

2.D1.14

En parabel er graf for funktionen

$$f(x)=x^2-4x-5.$$

a) Bestem koordinatsættet til toppunktet for parablen.

b) Tegn parablen i et passende koordinatsystem.

2.D1.15

En funktion *f* er givet ved

$$f(x)=a\cdot x^2-4x-10\ .$$

Grafen for *f* er en parabel, som har toppunkt i $T\left(-2,-6\right)$.

a) Bestem konstanten *a*.

2.D1.16

Et andengradspolynomium er givet ved

$$f(x)=2\cdot x^2-6\cdot x+c$$

a) Bestem førstekoordinaten til parablens toppunkt.

b) Bestem *c*, så toppunktets andenkoordinat bliver 5.

2.D1.17

Et andengradspolynomium *p* er givet ved

$$p(x)=x^2+10x\ .$$

a) Bestem rødderne for *p*.

2.D1.18

En parabel er givet ved ligningen

$$y=4\cdot x^2+b\cdot x+9$$

a) Bestem parablens skæring med andenaksen.

b) Bestem de værdier af *b*, for hvilke parablen har netop ét skæringspunkt med førsteaksen.

2.D1.19

En parabel er givet ved ligningen

$$y = 2x^2 - 8x + c.$$

a) Bestem parablens skæringspunkter med førsteaksen, når $c = 6$.

b) Bestem andenkoordinaten for parablens toppunkt udtrykt ved c.

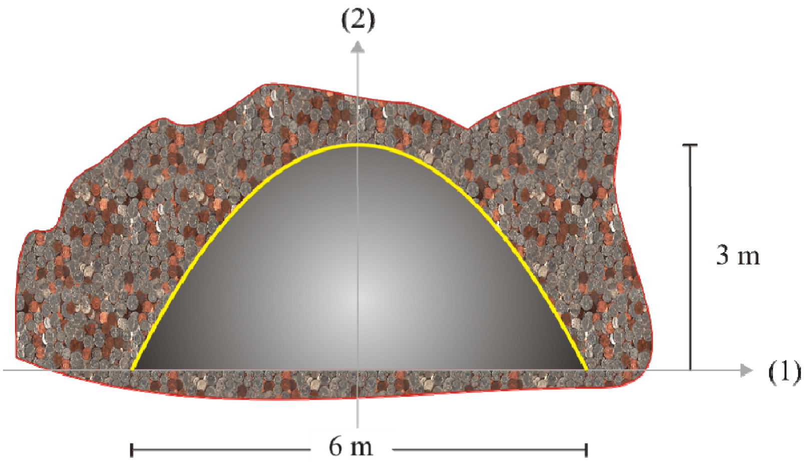
c) For hvilke værdier af c har parablen og førsteaksen ingen fælles punkter?

2.D1.20

a) Gør rede for, at 2 er rod i polynomiet

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 4x + 8.$$

2.D1.21



Figuren viser et tværsnit af en bjergtunnel indtegnet i et koordinatsystem. Den krumme del af tværsnittet har form som en del af en parabel. Tunnelen er 6 m bred og 3 m høj.

a) Gør rede for, at parablen er graf for funktionen

$$p(x) = -\tfrac{1}{3}x^2 + 3.$$

2.D1.22

En mand er til en fest, hvor han indtager alkohol under middagen. Efter middagen stopper han med at indtage alkohol. I en model vokser mandens alkoholpromille under middagen med 0,6 pr. time. Efter middagen aftager mandens alkoholpromille med 0,2 pr. time. Det oplyses at middagen varer i 2 timer.

a) Bestem, hvor mange timer der går fra middagens start til mandens alkoholpromille igen er 0.

b) Opstil en gaffelforskrift, der beskriver mandens alkoholpromille som funktion af tiden t (målt i timer efter middages start).

2.D1.23

I et biludlejningsfirma koster det 1200 kr. for at leje en bil. For denne pris kan man køre 300 km, og for hver kørt km derudover betales yderligere 1,30 kr pr km.

a) Bestem den samlede pris for leje af en bil inklusiv 500 km kørsel.

b) Opstil en gaffelforskrift for den funktion f, der beskriver den samlede pris for leje af en bil som funktion af antal kørte km.

2.D1.24

Ved dykning gælder, at trykket stiger med 1,0 atm for hver gang dykkets dybde stiger med 10 m. Trykket ved havoverfladen er 1,0 atm.

a) Indfør passende variable, og opstil et udtryk som beskriver trykket (målt i atm) som funktion af dykkets dybde (målt i meter under havoverfladen).

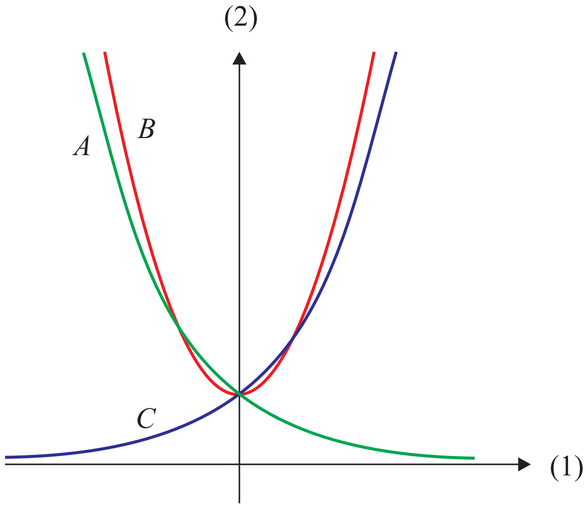
Foto: www.colourbox.dk

2.D1.25

Hver af graferne A, B og C på figuren er graf for en af funktionerne f, g og h, der er givet ved:

$$f(x) = 2^x$$
$$g(x) = 2^{-x}$$
$$h(x) = x^2 + 1$$

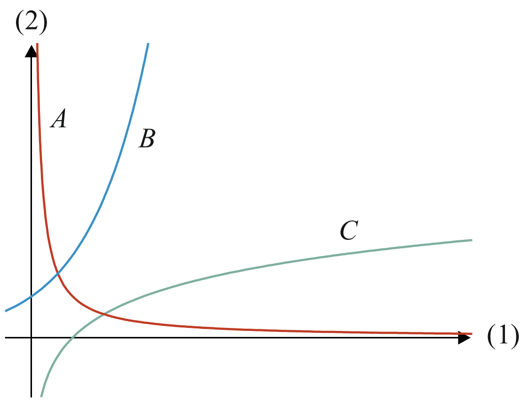
a) Angiv for hver af graferne A, B og C, hvilken af de tre funktioner den er graf for. Begrund svaret.



2.D1.26

På figuren ses en skitse af graferne for funktionerne f, g og h.

$$f(x) = \ln(x)$$
$$g(x) = \frac{1}{x}$$
$$h(x) = 2^x$$

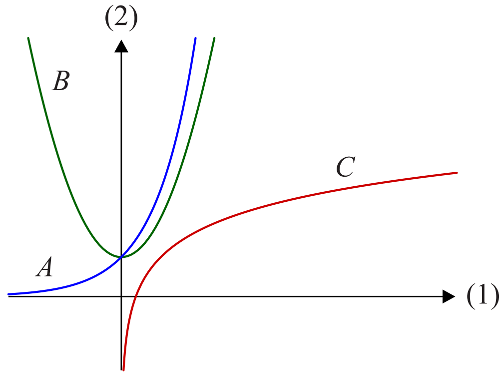


a) Gør rede for, hvilken graf der hører til hvilken funktion.

2.D1.27

På figuren ses grafen for hver af de tre funktioner:

$$f(x) = \ln(x) + 1$$
$$g(x) = x^2 + 1$$
$$h(x) = e^x .$$

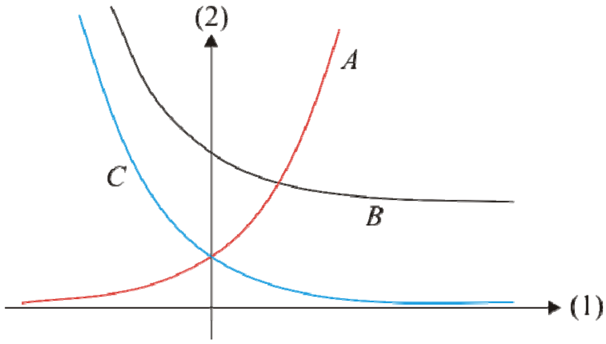


a) Gør rede for, hvilken af graferne A, B og C, der hører til hvilken af de tre funktioner f, g og h.

2.D1.28

Hver af de tre grafer A, B og C på figuren er graf for en af de tre funktioner f, g og h. De tre funktioner er bestemt ved

$$f(x) = 0{,}5^x$$
$$g(x) = 2^x$$
$$h(x) = 0{,}5^x + 2$$

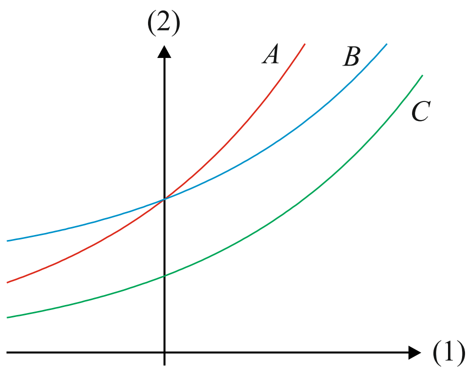


a) Gør for hver af graferne A, B og C rede for, hvilken af de tre funktioner den er graf for.

2.D1.29

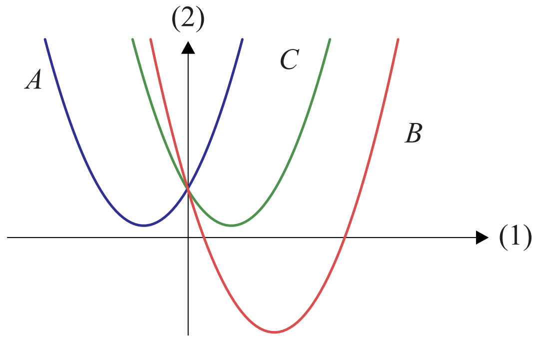
På figuren ses en skitse af graferne for de tre funktioner

$$f(x) = 3 \cdot 1{,}2^x$$
$$g(x) = 2 \cdot f(x)$$
$$h(x) = f(x) + 3.$$



a) Gør for hver af graferne A, B og C, hvilken af funktionerne f, g og h den er graf for.

2.D1.30



En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^2 - 3x + 3.$$

På figuren ses tre parabler A, B og C, hvoraf den ene er grafen for f.

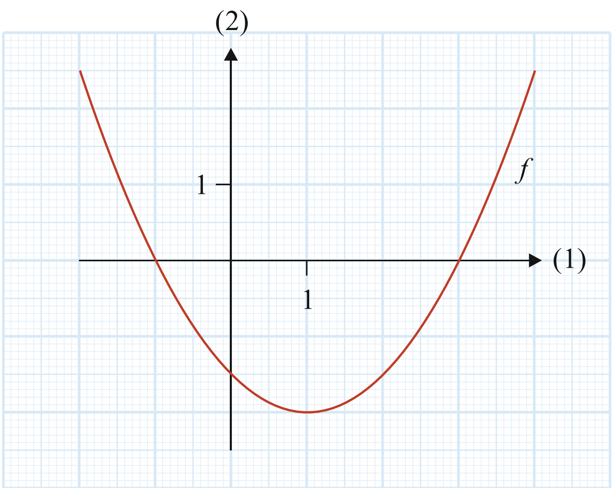
a) Bestem diskriminanten for f.

b) Argumentér for, hvilken af de tre parabler der er grafen for f.

2.D1.31

På figuren ses en parabel, der er graf for et andengradspolynomium givet ved

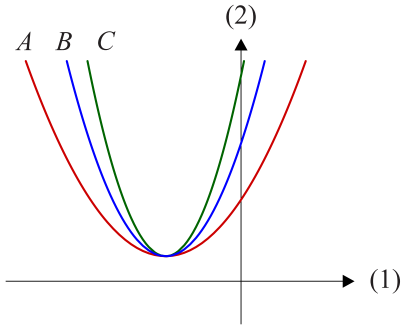
$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$



Det oplyses at $a = \dfrac{1}{2}$.

a) Bestem konstanterne b og c.

2.D1.32



Figuren viser tre parabler *A*, *B* og *C*. Hver af de tre parabler er graf for et andengradspolynomium på formen

$$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c\,.$$

a) Gør rede for, hvilken af de tre parabler, der hører til den største værdi af *a*.

b) Gør rede for, hvilken af de tre parabler der hører til den mindste værdi af *b*.

2.D1.33

En funktion *f* er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} -2x+5 & -3 \leq x \leq 2 \\ x-1 & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

a) Tegn grafen for *f*.

2.D1.34

En funktion *f* er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 & -4 \leq x \leq 1 \\ x-1 & 1 < x \leq 5 \end{cases}$$

a) Udfyld de tomme pladser i tabellen

x	-2	2	
$f(x)$			0

2.D1.35

To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = \frac{16}{x}, \qquad x > 0.$$

a) Bestem $f(2)$ og $g(2)$.

b) Tegn graferne for f og g i første kvadrant i et koordinatsystem.

2.D1.36

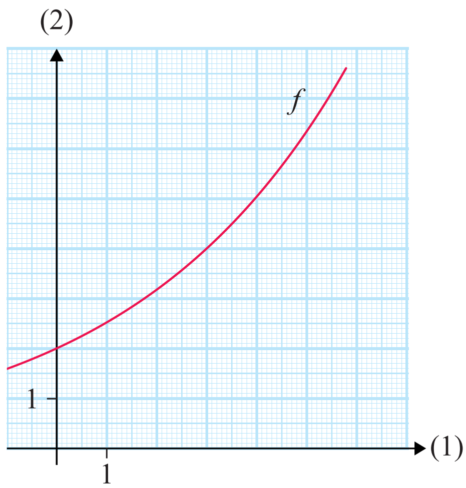
To eksponentialfunktioner f og g opfylder, at

$$f(0) = g(0) = 2.$$

Figuren viser grafen for f tegnet i et koordinatsystem.

Det oplyses, at fordoblingskonstanten for g er dobbelt så stor som fordoblingskonstanten for f.

a) Tegn en skitse af grafen for g i samme koordinatsystem som grafen for f.



2.D1.37

Et andengradspolynomium f er givet ved

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

a) Tegn en mulig graf for f, når $a < 0$, $c < 0$ og diskriminanten d er positiv.

2.D1.38

Et andengradspolynomium f er bestemt ved

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

Grafen for f er en parabel.

a) Tegn en skitse af en mulig graf for f, når det oplyses, at diskriminanten er negativ, a er positiv, og c er positiv.

2.D1.39 En funktion *f* er bestemt ved

$$f(x) = x^2 - 4x \ .$$

Grafen for *f* er en parabel.

a) Vis, at parablen skærer førsteaksen i $x = 0$ og i $x = 4$.

b) Skitsér parablen i et passende koordinatsystem.

2.D1.40 Om andengradspolynomiet

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

oplyses, at $c < 0$, samt at grafen for *f* har toppunkt i $T(3,4)$.

a) Skitsér en mulig graf for *f*.

2.D1.41 Om et andengradspolynomium *f* oplyses, at

$$f(0) = -12 \ , \ f(3) = 0 \ \text{ og } \ f(-2) = 0 \ .$$

a) Skitsér grafen for *f*, og bestem en forskrift for *f*.

En linje *l* er givet ved ligningen

$$y = -2x - 4 \ .$$

b) Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem grafen for *f* og linjen *l*.

2.D1.42 Et andengradspolynomium *f* er givet ved

$$f(x) = 2 \cdot (x+2) \cdot (x-6),$$

a) Skitsér grafen for *f*.

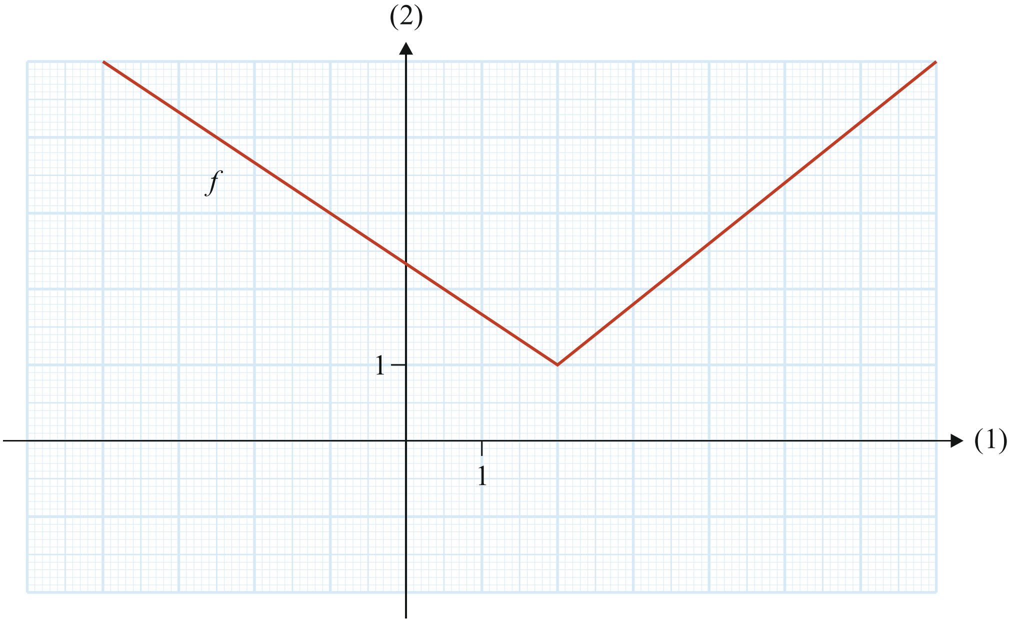
2.D1.43 Andengradspolynomiet *f* er givet ved

$$f(x) = (x+2)^2 + 3.$$

a) Bestem toppunktet for *f*, og argumenter for fortegnet for diskriminanten *d*.

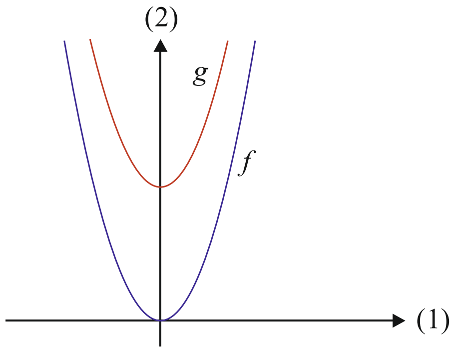
b) Skitsér grafen for funktionen *f*.

2.D1.44 På figuren ses grafen for en funktion f.



a) Bestem en forskrift for f.

2.D1.45 Figuren viser graferne for to funktionerne f og g.



Forskriften for f er bestemt ved

$$f(x) = x^2.$$

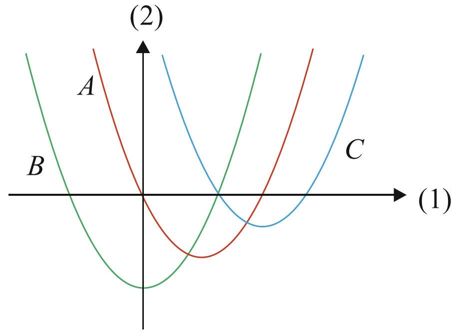
Det oplyses, at grafen for g er fremkommet ved at parallelforskyde grafen for f stykket 4 i lodret retning.

a) Bestem en forskrift for g.

Grafen for funktionen h fremkommer ved at parallelforskyde grafen for f stykket 2 i positiv retning på førsteaksen.

b) Bestem en forskrift for h.

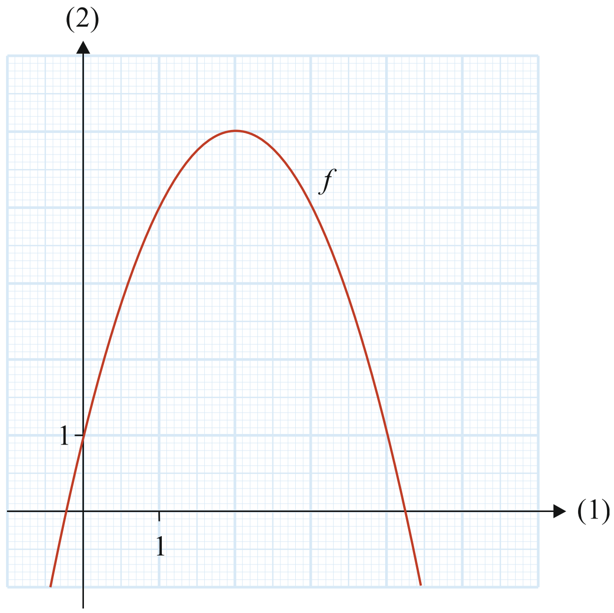
2.D1.46



Figuren viser graferne A, B og C, hvor A er graf for funktionen f. Graferne B og C er parallelforskydninger af graf A.

a) Argumentér for, hvilken af graferne B og C, der er graf for funktionen $g(x) = f(x-2)+1$.

2.D1.47



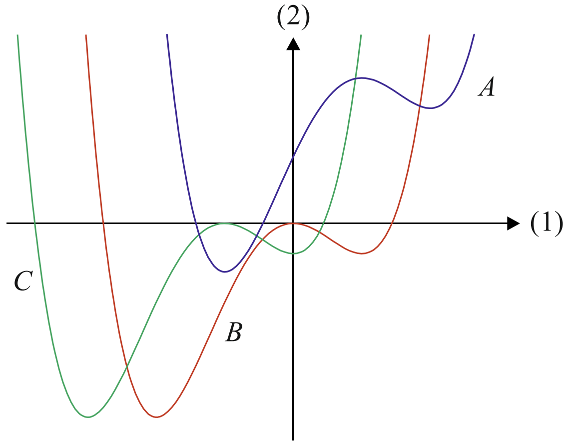
Figuren viser grafen for funktionen f.

Funktionen h er givet ved $h(x) = f(x+1) - 2$.

a) Bestem $h(2)$ og $h(-1)$.

b) Tegn grafen for h

2.D1.48



Ud fra en funktion f er funktionerne g og h bestemt ved

$$g(x) = f(x+1)$$
$$h(x) = f(x-1)+2.$$

På figuren ses graferne for de tre funktioner f, g og h.

a) Gør for hver af de tre grafer A, B og C rede for, hvilken funktion f, g eller h den er graf for.

2.D1.49

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x.$$

a) Bestem $f'(x)$.

2.D1.50

En funktion f er givet ved forskriften

$$f(x) = \ln(x)\cdot(5x^4+2).$$

a) Bestem $f'(1)$.

2.D1.51

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{4x+2}.$$

a) Bestem $f'(x)$.

2.D1.52

En funktion f er givet ved

$$f(x) = (3x+5)^{10}.$$

a) Bestem $f'(x)$.

2.D1.53

En funktion f er givet ved

$$f(x) = a\,x^3 + 5x^2 + 2x + 1,$$

hvor a er en konstant.

a) Bestem $f'(x)$.

b) Bestem a, så $f'(1) = -3$.

2.D1.54

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 + 1{,}5x^2 - 6x.$$

a) Bestem monotoniforholdene for funktionen f.

2.D1.55

Om en funktion f oplyses, at $f(2) = 5$ og $f'(2) = -4$.

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $(2, f(2))$.

2.D1.56

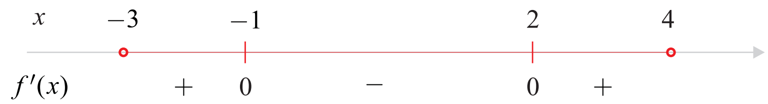
En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \mathrm{e}^x + 7x.$$

a) Gør rede for, at f er en voksende funktion.

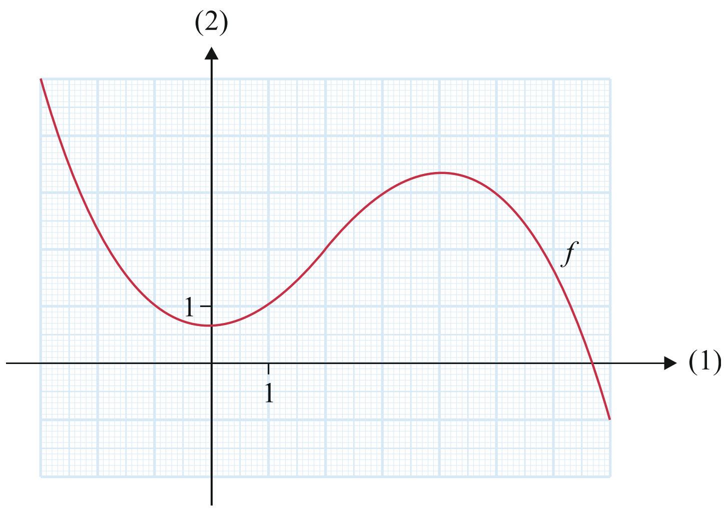
2.D1.57 Det oplyses, at en differentiabel funktion f opfylder følgende:

- $\text{Dm}(f) =]-3,4[$
- $f(-1) = 10$ og $f(2) = -9$
- fortegn og nulpunkter for f' er som angivet på tallinjen

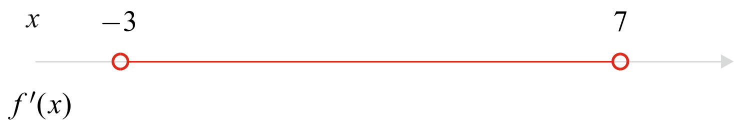


a) Tegn en mulig graf for funktionen *f*.

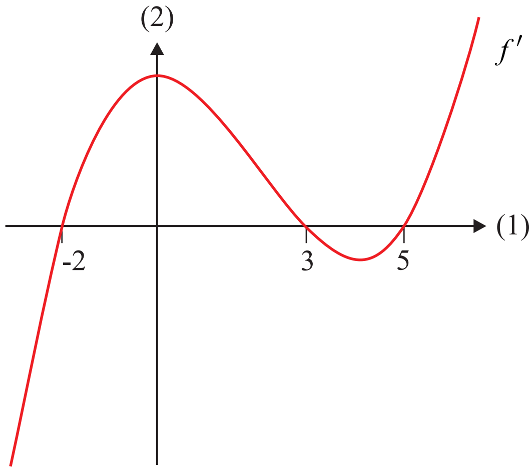
2.D1.58 Figuren viser grafen for en funktion *f*, der er defineret i $]-3;7[$.



a) Udfyld nedenstående fortegnslinje for f'.



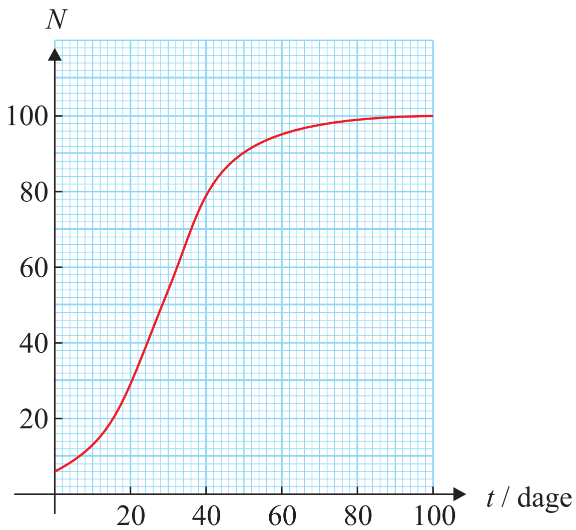
2.D1.59 Figuren viser i intervallet $[-3; 6]$ grafen for den afledede funktion f' for en funktion f.



a) Løs ligningen $f'(x) = 0$.

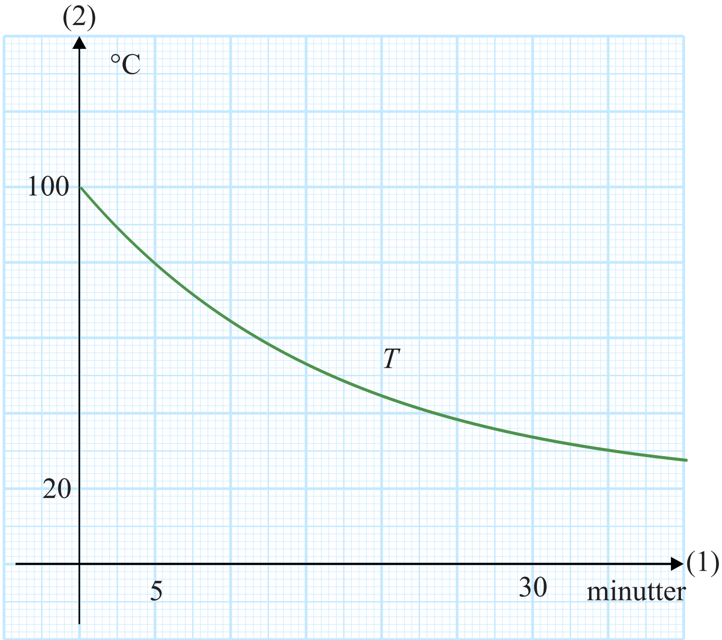
b) Bestem monotoniforholdene for funktionen f i intervallet $[-3; 6]$.

2.D1.60 Grafen viser udviklingen i antal individer N i en bestemt population af dyr.



a) Bestem væksthastigheden for antallet af individer i populationen til tidspunktet $t = 50$.

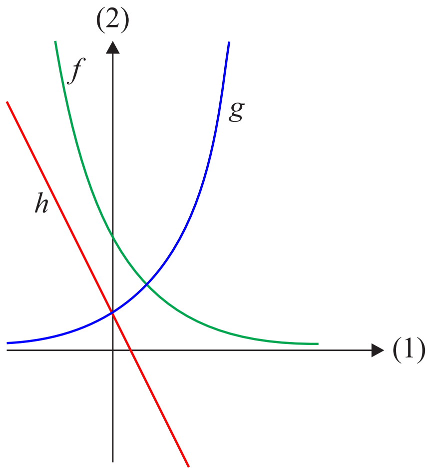
2.D1.61 I en model for afkøling af en væske betegner $T(x)$ væskens temperatur (målt i °C) til tidspunktet x (målt i minutter). På grafen nedenfor ses en del af grafen for T.



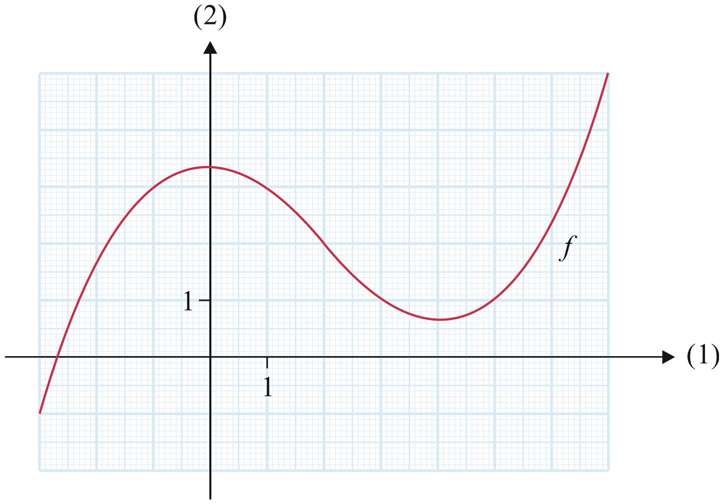
a) Benyt grafen til at bestemme $T'(15)$, og gør rede for, hvad dette tal fortæller om udviklingen i væskens temperatur.

2.D1.62 På figuren ses graferne for tre vækstmodeller $f(x)$, $g(x)$ og $h(x)$.

a) Bestem fortegnet for væksthastigheden for hver af de tre vækstmodeller, når $x=0$. Begrund dit svar.



2.D1.63 Figuren viser grafen for et tredjegradspolynomium *f*.



a) Bestem de lokale ekstremumssteder for f .

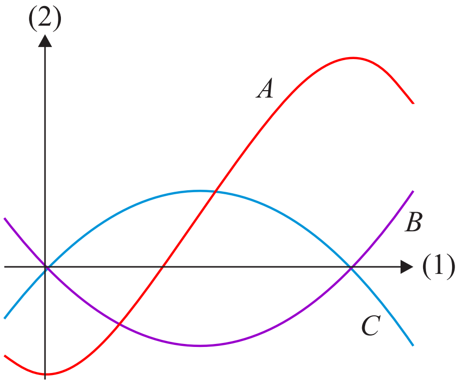
b) Bestem funktionens lokale ekstrema.

2.D1.64 En funktion *f* er givet ved

$$f(x) = -x^2 + 3x + 7.$$

a) Bestem den værdi af *x*, hvor f har maksimum.

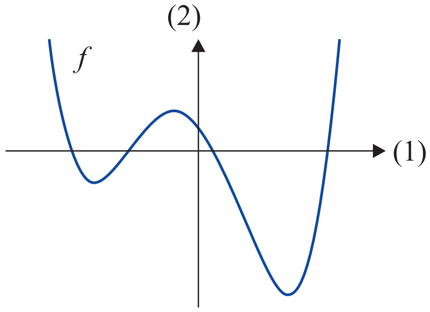
2.D1.65 På figuren ses en skitse af graferne for tre funktioner $f(x)$, $g(x)$ og $f'(x)$.



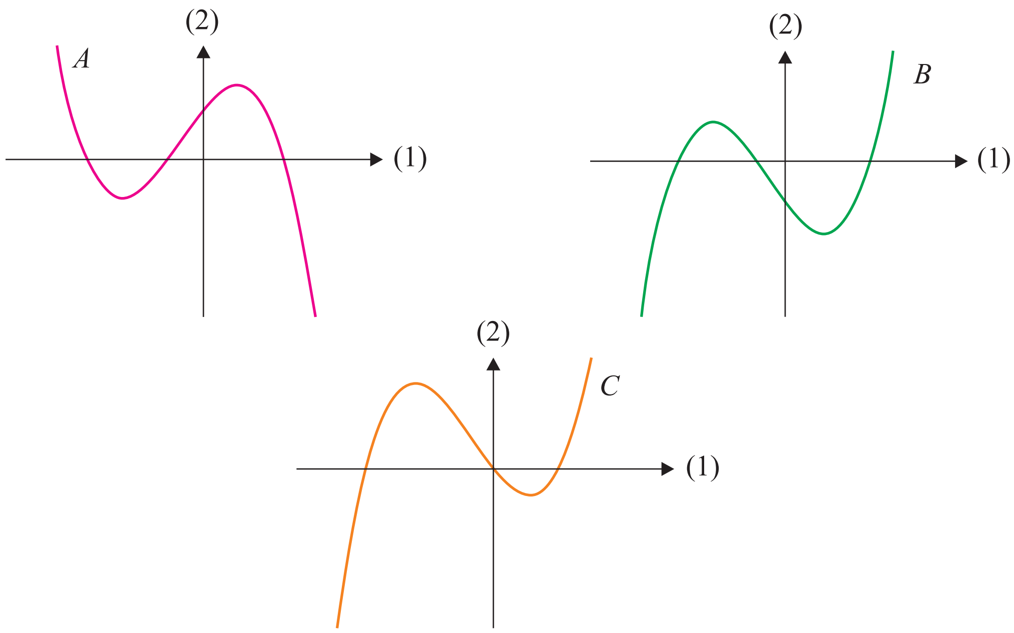
a) Gør rede for, hvilken graf der hører til hvilken funktion.

2.D1.66

På figuren ses grafen for en funktion f.



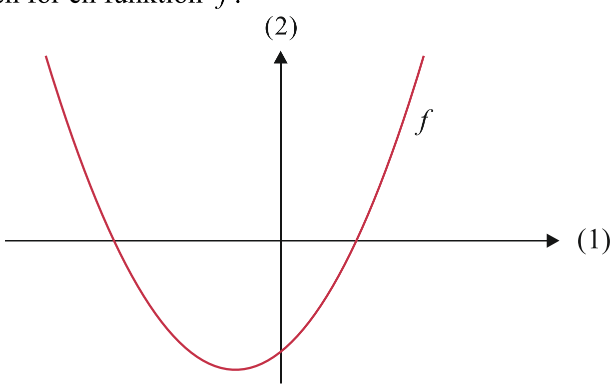
Det oplyses, at en af nedenstående tre grafer *A*, *B* eller *C* er graf for f'.



a) Gør rede for, hvilken af de tre grafer, der er graf for f'.

2.D1.67

På figuren ses grafen for en funktion f.



a) Tegn en mulig graf for f'.

2.D1.68

En linje l har ligningen

$$y=-2x+1.$$

Det oplyses, at l er tangent til grafen for funktionen f i punktet $P(1,f(1))$.

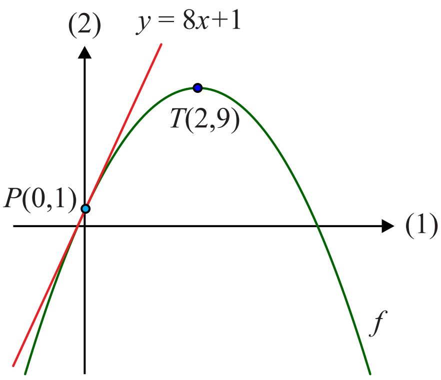
a) Gør rede for, at $f'(1)=-2$ og at $f(1)=-1$.

2.D1.69

En parabel er graf for funktionen

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c.$$

Det oplyses, at tangenten til grafen for f i punktet $P(0,1)$ er givet ved ligningen $y=8x+1$, samt at parablen har toppunkt i punktet $T(2,9)$.

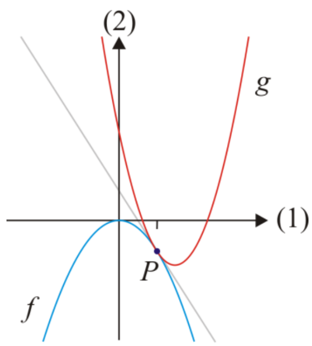


a) Bestem tallene a, b og c.

2.D1.70

To andengradspolynomier f og g er givet ved

$$f(x)=-x^2$$
$$g(x)=2x^2+bx+c.$$



a) Bestem ligningen for tangenten til f i punktet $P(1,f(1))$.

Graferne for de to funktioner har en fælles tangent i punktet $P(1,f(1))$.

b) Bestem tallene b og c.

Delprøve 2

2.D2.1 En funktion *f* er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5x^2 - 2x + 3 & x \leq 4 \\ x - 1 & 4 < x \end{cases}$$

a) Tegn grafen for *f*.

b) Løs ligningen $f(x) = 5$.

2.D2.2 En funktion *f* er givet ved

$$f(x) = x^3 - 9x^2 - 30x + 200 .$$

a) Tegn grafen for *f* i grafvinduet $[-10, 15] \times [-200, 250]$.

b) Bestem nulpunkterne for *f*.

2.D2.3 En funktion *f* er givet ved

$$f(x) = \tfrac{1}{3}x^3 - 4x + 6 .$$

a) Tegn grafen for *f*.

En vandret linje *l* med ligningen $y = b$ skærer grafen for *f* i enten ét, to eller tre punkter.

b) Bestem de værdier af *b*, for hvilke linjen *l* skærer grafen for *f* i netop to punkter.

2.D2.4 To funktioner *f* og *g* er givet ved

$$f(x) = 12 \cdot \sqrt{x}$$
$$g(x) = x^2 - 7x + 12.$$

a) Bestem rødderne for *g*.

b) Opstil og løs en ligning til bestemmelse af førstekoordinaten til hvert af skæringspunkterne mellem grafen for *f* og grafen for *g*.

2.D2.5 To funktioner *f* og *g* er bestemt ved:

$$f(x)=\sqrt{x}\,,\quad x\geq 0$$
$$g(x)=0{,}5x$$

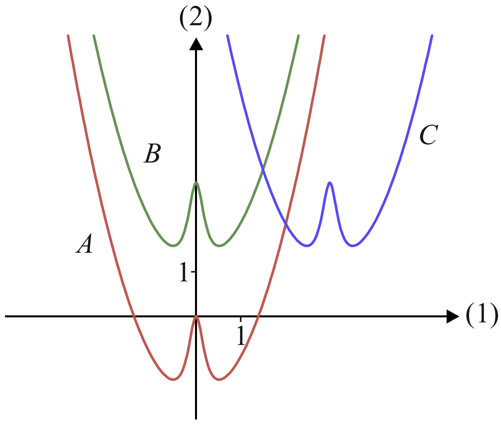
a) Tegn graferne for *f* og *g*.

b) Bestem grafisk koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem graferne for *f* og *g*.

2.D2.6 Ud fra en funktion *f* er funktionerne g og *h* bestemt ved

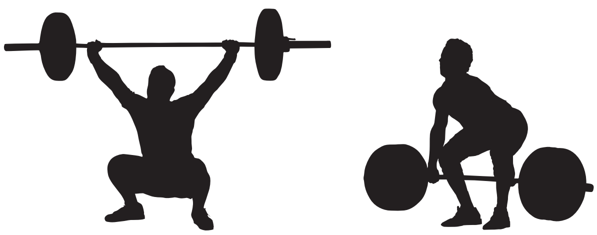
$$g(x)=f(x)-3$$
$$h(x)=f(x-3).$$

På figuren ses graferne for de tre funktioner *f*, *g* og *h*.



a) Angiv for hver af graferne *A*, *B* og *C*, hvilken af funktionerne *f*, *g* og *h* den hører til. Begrund svaret.

2.D2.7



Grafik: www.colourbox.dk

Den internationale vægtløfterorganisation benytter den såkaldte Sinclair-koefficient til at sammenligne vægtløfternes præstationer på tværs af forskellige vægtklasser.
I perioden $2008-2012$ blev Sinclair-koefficienten bestemt ved

$$C(m)=10^{0{,}78478\cdot\left(\log\left(\frac{m}{173{,}961}\right)\right)^2}\,,\quad 50<m<250\,,$$

hvor m er vægten af en vægtløfter (målt i kg), og $C(m)$ er Sinclair-koefficienten.

a) Bestem Sinclair-koefficienten for en vægtløfter, der vejer 62 kg.

b) Bestem vægten af en vægtløfter med en Sinclair-koefficient på 1,2.

Kilde: http://www.iwf.net

2.D2.8 Sammenhængen mellem maksimal relativ væksthastighed *V* (målt i døgn^{-1}) og kropsmasse *M* (målt i gram) for flercellede vekselvarme dyr er givet ved

$$\log V = -1{,}64 - 0{,}27 \log M \, .$$

a) Bestem *V*, når $M = 3000$.

b) Bestem *V* som funktion af *M*.

Kilde: Kaj Sand-Jensen: Økologi og biodiversitet, Gads forlag, København 2000, *ISBN* 87-12-03565-3

2.D2.9

Foto: www.colourbox.dk

I en matematisk model kan østrogenkoncentrationen efter indtagelse af en p-pille beskrives ved

$$C(t) = 67 \cdot (\mathrm{e}^{-0{,}041 \cdot t} - \mathrm{e}^{-3{,}1 \cdot t}), \quad 0 \le t \le 36 \, ,$$

hvor $C(t)$ er østrogenkoncentrationen i blodet (målt i picogram pr. milliliter) til tidspunktet *t* (målt i timer) efter indtagelse af en p-pille.

a) Tegn grafen for *C*.

b) Bestem grafisk, hvor lang tid der går, fra man har indtaget en p-pille, til østrogenkoncentrationen er maksimal.

For at undgå at blive gravid skal der tages en ny p-pille, når østrogenkoncentrationen falder til en værdi under 25 picogram pr. milliliter.

c) Benyt modellen til at bestemme, hvor lang tid der går, inden der skal tages en ny p-pille.

Kilde: Investigating birth control: comparing oestrogen levels in patients using the Ortho Evra patch versus the Ortho-Cyclen pill, Theresa A. Laurent, TEACHING MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS, Volume 27, No. 2, 2008.

2.D2.10

Foto: www.colourbox.dk

En persons alkoholpromille afhænger af flere faktorer, bl.a. af mængden af indtaget alkohol, tiden efter indtaget, personens køn og personens vægt.

I en model er alkoholpromillen $P(x)$ for kvinder til tidspunktet x (målt i timer efter indtagelse af alkohol) givet ved

$$P(x) = -0{,}15x + 20 \cdot \frac{a}{M},$$

hvor M er kvindens vægt, og a er antallet af genstande, som indtages til tiden $x = 0$.

Anne vejer 70 kg, og Bente vejer 50 kg. De to kvinder indtager samtidigt hver 4 genstande.

a) Benyt modellen til at bestemme, hvor meget længere det varer for Bente end for Anne at få en alkoholpromille på under 0,5.

b) Benyt modellen til at bestemme, hvor mange genstande Anne højst kan indtage, hvis hun ønsker en alkoholpromille på 0 efter 3 timer.

Kilde: Sundhed.dk

2.D2.11

Grafik: www.colourbox.dk

I en model antages det, at der er en lineær sammenhæng mellem den gennemsnitlige vægt af danske kvinder og tiden (målt i år fra start af måleperioden). Det oplyses, at den gennemsnitlige vægt af danske kvinder vokser med 1,4 kg over en 5-årig periode.

a) Benyt modellen til at bestemme den årlige stigning i den gennemsnitlige vægt af danske kvinder.

b) Bestem, hvor lang tid der skal gå, før den gennemsnitlige vægt af danske kvinder er vokset med 4,0 kg.

Kilde: DTU/fødevareinstituttet, 2015.

2.D2.12

Foto: www.colourbox.dk

Ifølge en opgørelse stiger det årlige antal af nye lungekræfttilfælde blandt kvinder i Danmark med 1,3% om året efter 2010. I 2010 var der 2038 nye tilfælde af lungekræft blandt kvinder i Danmark.

a) Indfør passende variable, og opstil en model, der beskriver udviklingen i det årlige antal nye lungekræfttilfælde blandt kvinder i Danmark.

I en anden model kan udviklingen i det årlige antal nye lungekræfttilfælde blandt mænd i Danmark beskrives ved

$$m(x) = 2244 \cdot 0{,}99^x,$$

hvor $m(x)$ er det årlige antal nye lungekræfttilfælde til tidspunktet x (målt i antal år efter 2010).

b) Hvornår er det årlige antal nye lungekræfttilfælde ifølge de to modeller tættest på at være ens for mænd og kvinder?

2.D2.13 En model for den årlige globale CO_2-udledning er givet ved

$$P(t) = 60,297 \cdot 10^9 \cdot 1,031^t \ ,$$

hvor $P(t)$ betegner den årlige globale CO_2-udledning (målt i tons) til tidspunktet t (målt i år efter 1950).

a) Gør rede for, hvad konstanterne i modellen fortæller om udviklingen i den årlige globale CO_2-udledning efter 1950.

Samtidig er en model for befolkningsudviklingen i verden givet ved

$$N(t) = 6,72 \cdot 10^7 \cdot t + 2,594 \cdot 10^9 \ ,$$

hvor $N(t)$ betegner befolkningstallet i verden til tidspunktet t (målt i antal år efter 1950).

b) Opstil en model, der beskriver den gennemsnitlige årlige CO_2-udledning pr. person (målt i tons) som funktion af tiden t (målt i år efter 1950).

c) Benyt modellen til at give et skøn over den gennemsnitlige årlige CO_2-udledning pr. person i 2012.

2.D2.14

Foto: www.colourbox.dk

Ved rygning af hash optages det aktive stof THC (tetra-hydro-cannabinol) i kroppen. Stoffets nedbrydning i kroppen kan beskrives ved en eksponentiel model med en halveringstid på 2,5 døgn. En person indtager 25 mg THC ved at ryge en enkelt joint. Personen stopper herefter rygningen af hash.

a) Opskriv en funktion, der beskriver mængden af THC i personens krop (målt i mg) som funktion af tiden (målt i døgn efter indtagelsen).

En typisk narkotest vil være positiv, hvis mængden af THC i personens krop overstiger 3 mg.

b) Benyt modellen til at bestemme, hvor mange døgn der går, før personen ikke testes positiv ved en narkotest.

2.D2.15

Foto: Wikimedia Commons

"***Danskerne sviner mere end nogensinde***
I 1994 *blev der i Danmark produceret* 11.105.000 *ton affald. I* 2004 *var tallet steget til* 13.359.000 *ton affald. Og tallet er steget yderligere frem til i dag.*"

I det følgende antages det, at udviklingen i affaldsproduktionen i Danmark vokser eksponentielt i perioden 1994-2004.

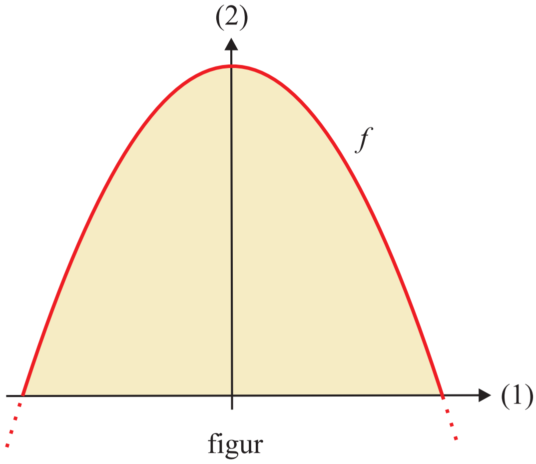
a) Vis, at den gennemsnitlige årlige procentvise stigning i affaldsproduktionen i Danmark i perioden 1994-2004 var 1,865% .

b) Indfør passende variable, og opstil med udgangspunkt i den gennemsnitlige årlige procentvise stigning en model, der beskriver udviklingen i affaldsproduktionen i Danmark i perioden 1994-2004.

c) Benyt modellen til at bestemme, hvor lang tid der går, før affaldsproduktionen i Danmark er fordoblet.

Kilde: Affaldsstatistik 2009 *og Fremskrivning af affaldsmængder* 2011-2050*, Orientering fra Miljøstyrelsen Nr. 4 2011.*

2.D2.16



figur

På billedet ses en bygning, hvor facadens profil har form som en parabel (se figur). I et koordinatsystem med enheden 1 meter på akserne er facadens profil en del af grafen for funktionen

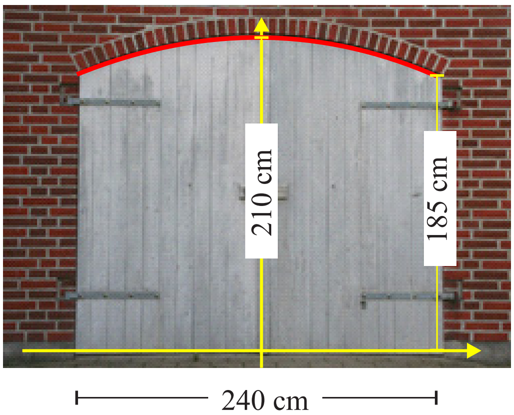
$$f(x) = -\tfrac{1}{20}x^2 + 45.$$

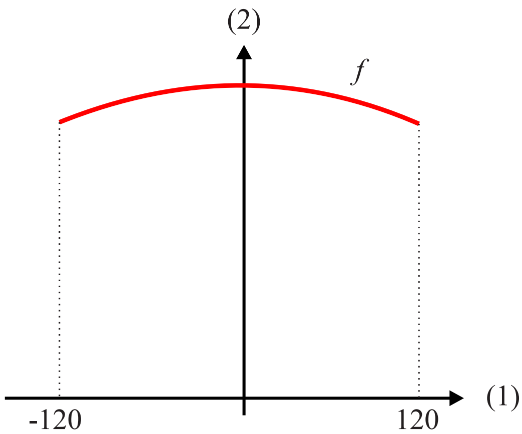
a) Bestem facadens højde.

b) Bestem facadens bredde.

Kilde: en.wikipedia.org

2.D2.17





Figuren viser en garageport, som har bredden 240 cm, højden 185 cm ved hængslerne og højden 210 cm midt på porten.
I en model kan den øverste bue af garageporten beskrives ved en del af grafen for et andengradspolynomium *f*. Modellen er indtegnet i et koordinatsystem, hvor førsteaksen følger portens nederste kant, og andenaksen følger midten af porten.

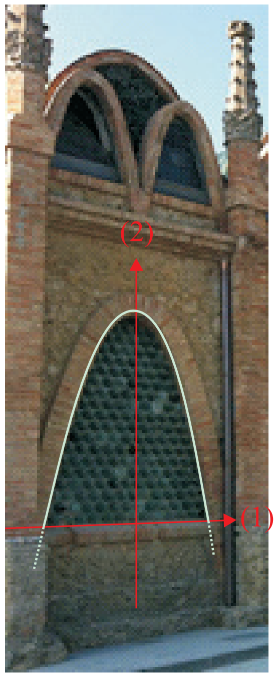
a) Gør rede for, at en forskrift for *f* kan skrives som

$$f(x) = -0{,}001736 \cdot x^2 + 210.$$

2.D2.18 På figuren er en del af en bygning indlagt i et koordinatsystem. I en model afgrænses det store vindue af førsteaksen og grafen for funktionen

$$f(x) = 4 - \frac{4{,}6^{x} + 4{,}6^{-x}}{2},$$

hvor x måles i meter.



a) Bestem vinduets maksimale bredde og højde.

b) Bestem en forskrift for den parabel, der har samme maksimale bredde og højde som grafen for f.

2.D2.19 I en model kan den økonomiske indkomstfordeling i et bestemt land beskrives ved

$$f(x) = 0{,}00005 \cdot x^{3} - 0{,}0005 \cdot x^{2} + 0{,}55 \cdot x, \quad 0 \le x \le 100,$$

Hvor $f(x)$ betegner den procentdel af landets samlede indkomst, som x tjener, hvor x betegner den fattigste andel af landets befolkning (målt i procent af befolkningstallet).

a) Benyt modellen til at bestemme den procentdel af landets samlede indkomst, som de 50 procent fattigste tjener.

Robin Hood indekset er et mål for den økonomiske ulighed i landet og bestemmes som maksimum for funktionen g bestemt ved

$$g(x) = x - f(x), \quad 0 \le x \le 100,.$$

b) Benyt modellen til at bestemme Robin Hood indekset for landet.

2.D2.22 En funktion *f* er givet ved

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}.$$

a) Bestem $f'(3)$, og forklar betydningen af tallet.

b) Løs ligningen $f'(x) = 1$, og gør rede for løsningernes betydning.

2.D2.23 En funktion *f* er givet ved

$$f(x) = 4\ln(x) - 2x + 8.$$

a) Bestem $f'(x)$.

b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet $P(1, f(1))$.

2.D2.24 En funktion *f* er bestemt ved

$$f(x) = x \cdot e^{-x} + 3x.$$

a) Bestem $f(0)$ og $f'(0)$.

b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet $P(0, f(0))$.

2.D2.25 En funktion *f* er givet ved

$$f(x) = (x^2 + 2x - 2) \cdot e^{-x} .$$

a) Løs ligningen $f'(x) = 0$.

b) Bestem monotoniintervallerne for *f*.

2.D2.26 En funktion *f* er givet ved

$$f(x) = e^x - 3x + 1.$$

a) Bestem $f'(x)$.

b) Gør rede for, at funktionen *f* har et minimum.

2.D2.27 En funktion f er givet ved

$$f(x)=x^3-3x^2-9x+30.$$

a) Bestem monotoniforholdene for f.

Grafen for f har en tangent t_1 med røringspunkt $P(0,f(0))$.

b) Bestem en ligning for t_1.

Grafen for f har en anden tangent t_2 med samme hældningskoefficient som t_1.

c) Bestem førstekoordinaten til røringspunktet for t_2.

2.D2.28 En funktion f er givet ved

$$f(x)=x^3-5x^2+4x.$$

a) Bestem nulpunkterne for f.

b) Bestem monotoniforholdene for f.

Linjen l med ligningen $y=x-9$ er tangent til grafen for f i punktet $P(3,f(3))$.
En anden linje m er parallel med linjen l og tangerer grafen for f i punktet Q.

c) Bestem førstekoordinaten til punktet Q.

2.D2.29 Coenzym Q10 er et vitaminbeslægtet stof, som dannes i kroppens celler. I en model stiger Q10-indholdet i hjertets celler i alderen 0 til 20 år, hvorefter den falder. I modellen kan udviklingen i Q10-indholdet i hjertets celler hos en bestemt person beskrives ved

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}06\cdot x^{0{,}9} & ,\ 0<x\le 20 \\ 0{,}89\cdot 0{,}95^{x-20} & ,\ 20<x\le 80 \end{cases}$$

hvor $f(x)$ betegner Q10-indholdet (målt i g), når personen er x år gammel.

a) Tegn grafen for f.

b) Bestem $f'(30)$, og gør rede for, hvad tallet fortæller om udviklingen i Q10-indholdet hos personen ifølge modellen.

2.D2.30 En influenzaepidemi på en skole kan beskrives ved modellen

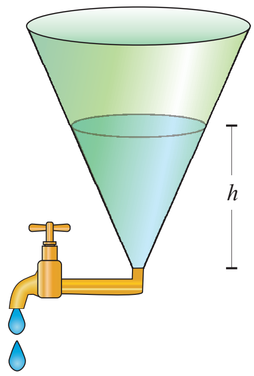
$$N(t)=\frac{800}{1+99\cdot \mathrm{e}^{-0,5t}},$$

hvor $N(t)$ er antallet af personer, der er influenzaramte t døgn efter epidemiens udbrud.

a) Tegn grafen for $N(t)$, når $0\leq t\leq 25$, og bestem antallet af influenzaramte 5 døgn efter epidemiens udbrud.

b) Bestem $N'(12)$, og beskriv, hvad dette tal fortæller om antallet af influenzaramte.

2.D2.31 I en model for tømning af væske fra en bestemt beholder kan væskehøjden h (målt i cm) som funktion af tiden t (målt i sekunder) beskrives ved



$$h(t)=(3128-40\cdot t)^{0,4},\quad 0\leq t\leq 78,2.$$

a) Bestem væskehøjden i beholderen efter 20 sekunder.

b) Bestem hvornår væskehøjden i beholderen er 5 cm.

c) Bestem $h'(20)$, og giv en fortolkning af dette tal.

2.D2.32

Foto: www.colourbox.com

I en model kan længden af en bestemt type grønne leguaner som funktion af deres alder beskrives ved

$$f(x)=\frac{160}{1+799\cdot \mathrm{e}^{-2,59\cdot x}},\quad 0\leq x\leq 20,$$

hvor $f(x)$ er længden (målt i cm), og x er alderen (målt i år).

a) Tegn grafen for f.

b) Bestem $f'(2)$, og giv en fortolkning af dette tal.

c) Benyt modellen til at bestemme længden af en grøn leguan, når dens væksthastighed er størst.

2.D2.33

Grafik: www.colourbox.com

I en model gælder følgende sammenhæng mellem svømmetid og alder for mandlige elitesvømmere på 400 meter fri

$$p(t) = -0,01765 \cdot t^3 + 1,409 \cdot t^2 - 36,45 \cdot t + 534,6 \ , \quad 12 \le t \le 30 \ ,$$

hvor $p(t)$ er svømmetiden målt i sekunder, og t er alderen målt i år.

a) Tegn grafen for p.

b) Benyt modellen til at bestemme svømmetiden for en 28-årig mandlig elitesvømmer på 400 meter fri.

c) Benyt modellen til at bestemme den alder, hvor en mandlig elitesvømmer på 400 meter fri er hurtigst.

Kilde: "The math modeling of the stages of result development in high profile swimmers for the 50m, 100m, 200m, 400m and 1500m freestyle", Okičić et al, Physical Education and Sport Vol 5, No 2, 2007, 121-137

2.D2.34 To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = x^2 - 4x + 8$$
$$g(x) = 3x \cdot e^{-x} .$$

a) Tegn graferne for f og g.

b) Gør rede for, at den lodrette afstand mellem grafen for f og grafen for g som funktion af x kan beskrives ved funktionen $d(x) = f(x) - g(x)$.

c) Bestem den værdi af x, for hvilken den lodrette afstand mellem de to funktioners grafer er mindst mulig.

2.D2.35

Foto: www.colourbox.com

I en model for dyrkning af en bestemt kornsort kan sammenhængen mellem fortjenesten og mængden af tilført kunstgødning beskrives ved funktionen

$$f(x)=\frac{26400\cdot x}{x+1}-2350x+12000\,,\ 0\leq x\leq 10,$$

hvor $f(x)$ er fortjenesten (målt i kr. pr. hektar), og x er mængden af tilført kunstgødning (målt i tons pr. hektar).

a) Tegn grafen for f.

b) Benyt modellen til at bestemme fortjenesten, hvis der ikke tilføres kunstgødning.

Det oplyses, at grafen for f har netop én vandret tangent i intervallet $[0;10]$. Røringspunktet for denne tangent kaldes P.

c) Bestem koordinatsættet til P, og gør rede for, hvad det fortæller om fortjenesten.

2.D2.36 En virksomhed producerer og afsætter årligt x enheder af en vare, hvor $5000 \leq x \leq 20000$.
Omkostningerne $O(x)$ ved produktionen er givet ved

$$O(x) = 4,58 \cdot 10^{-6} x^3 - 0,05x^2 + 184,2x + 2 \cdot 10^7,$$

hvor $O(x)$ måles i kr.
Enhedsomkostningen $E(x)$ (målt i kr. pr. enhed) ved produktion af x enheder er bestemt ved

$$E(x) = \frac{O(x)}{x}.$$

a) Bestem enhedsomkostningen ved produktion af 10000 enheder.

b) Løs ligningen $O'(x) = E(x)$.

Fortjenesten $F(x)$ er bestemt ved

$$F(x) = x \cdot (-0,53x + 10000) - O(x),$$

hvor $F(x)$ måles i kr.

c) Bestem x, så fortjenesten er størst mulig.

2.D2.37

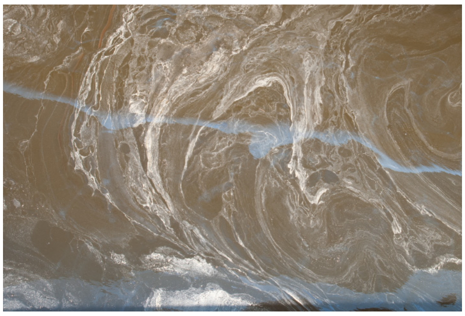


Foto: www.colourbox.com

I en model for et bestemt olieudslip i et havområde med rolige vind- og bølgeforhold kan udbredelsen af olieudslippet beskrives ved

$$A(t) = 8 \cdot t^{1,5},$$

hvor $A(t)$ betegner olieudslippets areal (målt i m^2) til tidspunktet t (målt i timer fra starten af olieudslippet).

a) Bestem $A'(100)$, og forklar betydningen af dette tal.

Det areal, som olieudslippet dækker, vokser ikke ubegrænset, men afhænger af oliemængden. I modellen gælder sammenhængen

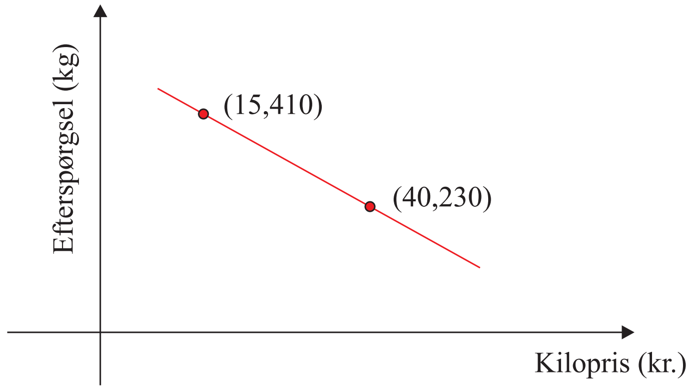
$$A_{\text{max}} = 10^4 \cdot V^{0,75},$$

hvor V betegner oliemængden (målt i m^3), og A_{max} betegner olieudslippets maksimale areal (målt i m^2).

b) Benyt modellen til at bestemme olieudslippets maksimale areal, når oliemængden er 1,5 m^3.

c) Bestem det tidspunkt, hvor olieudslippet har nået det maksimale areal.

2.D2.38 Figuren viser sammenhængen mellem efterspørgslen og kiloprisen på en bestemt vare.



I en model er efterspørgslen (målt i kg) en lineær funktion *f* af kiloprisen *x* (målt i kr.).

Det oplyses, at efterspørgslen er 410 kg ved en kilopris på 15 kr. og 230 kg ved en kilopris på 40 kr.

a) Bestem en forskrift for *f*.

I modellen er omsætningen bestemt ved

$$g(x) = x \cdot f(x), \quad 0 < x < 70,$$

hvor $g(x)$ er omsætningen (målt i kr.) ved en kilopris på *x* (målt i kr.).

b) Bestem den kilopris, som giver den største omsætning.

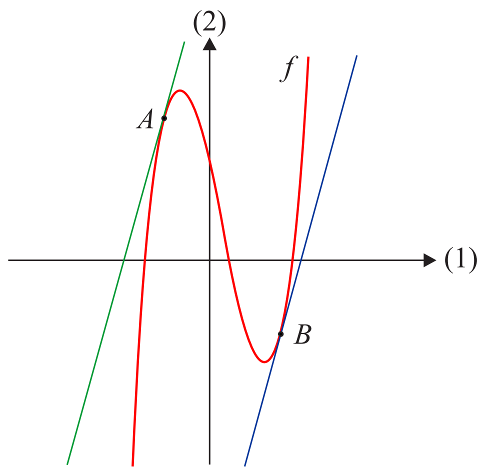
2.D2.39 En funktion er givet ved

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12.$$

a) Løs $f(x) = 0$.

Grafen for *f* har to forskellige tangenter med hældningskoefficienten 9. De to tangenters røringspunkter med grafen for *f* benævnes *A* og *B* (se figuren).

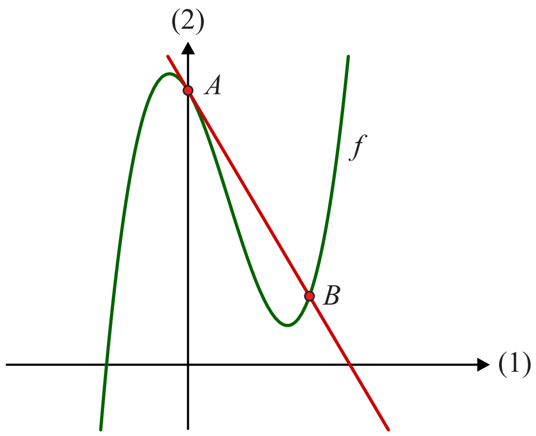
b) Bestem førstekoordinaten til hvert af punkterne *A* og *B*.



2.D2.40 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 8\,.$$

Grafen for f skærer andenaksen i punktet A.



Skaléringen på akserne er ikke ens

a) Vis, at linjen l med ligningen $y = -3x + 8$ er tangent til grafen for f i punktet A.

Grafen for f og linjen l skærer hinanden i et andet punkt B.

b) Bestem førstekoordinaten til punktet B.

3. Analystisk geometri og vektorer

Delprøve 1

3.D1.1

I et koordinatsystem i planen er tre vektorer $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ givet ved

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}-13\\23\end{pmatrix} \text{ og } \vec{c}=\begin{pmatrix}-4\\12\end{pmatrix}.$$

a) Undersøg, om $\vec{a}+\vec{b}$ kan skrives som $k\cdot\vec{c}$, hvor k er en konstant.

3.D1.2

I et koordinatsystem er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ givet ved

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix} \text{ og } \vec{b}=\begin{pmatrix}12\\15\end{pmatrix}.$$

a) Undersøg, om $\vec{b}$ kan skrives som $k\cdot\hat{\vec{a}}$, hvor k er en konstant.

3.D1.3

a) Bestem koordinaterne til $\vec{a}$, således at

$$\vec{a}+3\cdot\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\7\end{pmatrix}.$$

3.D1.4

I et koordinatsystem er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ givet ved

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-2t\end{pmatrix} \text{ og } \vec{b}=\begin{pmatrix}5t-1\\3\end{pmatrix}$$

a) Bestem skalarproduktet af de to vektorer $\vec{a}$ og, når $t=1$.

b) Bestem tallet t, så vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale.

3.D1.5

To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} \text{ og } \vec{b}=\begin{pmatrix}t\\6\end{pmatrix},$$

hvor t er et tal.

a) Bestem t, så $\det\left(\vec{a},\vec{b}\right)=30$.

3.D1.6

I et koordinatsystem er givet to punkter $A(20,5)$ og $B(5,10)$ samt en vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

a) Bestem arealet af parallelogrammet udspændt af $\overrightarrow{AB}$ og $\vec{a}$.

b) Bestem koordinatsættet til projektionen af $\overrightarrow{AB}$ på $\vec{a}$.

3.D1.7

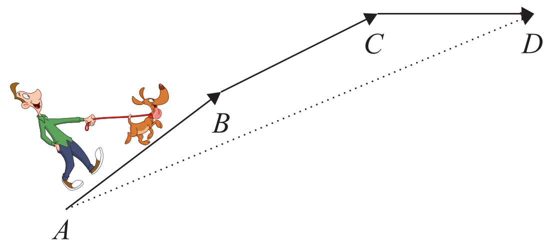
I et koordinatsystem er givet vektorerne

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}t\\5\end{pmatrix} \text{ og } \vec{b}=\begin{pmatrix}t-3\\-2\end{pmatrix}$$

a) Bestem de værdier for t, for hvilke $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er vinkelrette.

3.D1.8

En person følger på sin gåtur en rute fra punktet A til punktet D. Figuren viser en model af ruten.



I et koordinatsystem beskrives modellen af rutens dele ved vektorerne

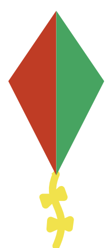
$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \text{og } \overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix},$$

hvor t er et tal.

Personen kan lægge sin rute, så turen går direkte fra A til D, hvor $\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}15\\5\end{pmatrix}$.

a) Bestem t.

3.D1.9



I en model kan den ene halvdel af dugen på en drage beskrives ved trekanten udspændt af vektorerne $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$. Enheden i modellen er dm.

a) Tegn en model af dragen i et koordinatsystem med enheden dm på begge akser.

b) Benyt modellen til at bestemme arealet af dugen.

3.D1.10 En ret linje l er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Beskriv linjen l ved et punkt og en retningsvektor.

b) Bestem koordinatsættet for punktet på linjen l, når parameterværdien er $t = 9$.

c) Tegn linjen l i et koordinatsystem.

3.D1.11 En ret linje l er givet ved en retningsvektor $\vec{r}$ og et punkt $P(20,-12)$, hvor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

a) Opskriv en parameterfremstilling for linjen l.

b) Tegn linjen l i et koordinatsystem.

3.D1.12 En ret linje l er givet ved ligningen

$$y = 5x - 9.$$

a) Beskriv linjen l ved et punkt og en retningsvektor.

b) Opstil en parameterfremstilling for linjen l.

3.D1.13 En ret linje l er givet ved ligningen

$$3x + 8y + 15 = 0.$$

a) Beskriv linjen l ved et punkt og en retningsvektor.

b) Opstil en parameterfremstilling for linjen l.

3.D1.14 En linje l er givet ved ligningen

$$y = 5 \cdot (x - 1) + 2.$$

a) Bestem en parameterfremstilling for l.

3.D1.15 En linje er givet ved ligningen

$$2(x+1) - 3(y-4) = 0.$$

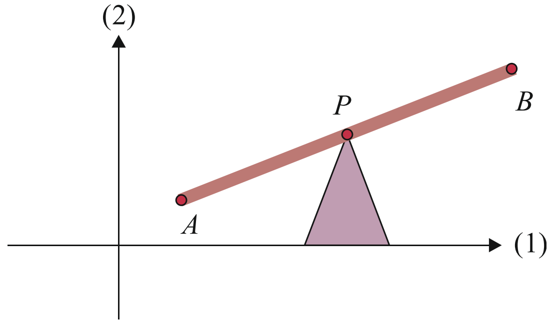
a) Tegn linjen i et koordinatsystem.

3.D1.16 En linje er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Tegn linjen i et koordinatsystem.

3.D1.17



Figuren viser en model af en vippe der er indlagt i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser. Punkterne *A* og *B* angiver vippens endepunkter og punktet *P* angiver midtpunktet på vippestangen.

I en af en vippens positioner har punkterne *A* og *B* koordinaterne $A(2,1)$ og $B(7,4)$.

a) Bestem koordinaterne til *P*.

3.D1.18 En vektor $\vec{a}$ er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem parameterfremstillingen for den linje l, der har $\vec{a}$ som retningsvektor og går gennem punktet $P(7,3)$.

3.D1.19 En linje *l* går gennem punkterne $A(1,2)$ og $B(3,8)$.

a) Bestem en ligning for linjen *l* på formen $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$.

3.D1.20 En ret linje *l* har hældningen 2 og går gennem punktet $A(-10,20)$.

a) Bestem en parameterfremstilling for linjen *l*.

3.D1.21 En linje l har retningsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ og går gennem punktet $P(12,-3)$.

a) Bestem en ligning for *l*.

3.D1.22 Linjen l går gennem punkterne $A(-1,2)$ og $B(5,26)$.

a) Bestem en parameterfremstilling for l.

Linjen m står vinkelret på l og går gennem A.

b) Bestem en ligning for m.

3.D1.23 I et koordinatsystem er givet punkterne $A(1,2)$ og $B(5,10)$

a) Bestem en ligning for den rette linje, der går gennem punktet $C(2,-4)$ og er parallel med vektoren $\overrightarrow{AB}$.

b) Bestem arealet af trekant ABC.

3.D1.24 En linje l har parameterfremstillingen

$$l:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad t \in \mathrm{R}.$$

a) Bestem en ligning for den linje m, der går gennem punktet (3,4) og er vinkelret på l.

3.D1.25 En linje l er givet ved ligningen $2x+3y-20=0$, og en lodret linje m er givet ved ligningen $x=-2$.

a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem linjerne l og m.

3.D1.26 En linje l er givet ved ligningen $x=10$.

a) Bestem en parameterfremstilling for l.

3.D1.27 To rette linjer l og m er bestemt ved ligningerne

$$\begin{aligned} l:&\quad y = 4x-5 \\ m:&\quad -2x+y=1 \end{aligned}$$

a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem l og m.

3.D1.28 To linjer l og m er bestemt ved

$$\begin{aligned} l:&\quad 2x-3y=1 \\ m:&\quad x+6y=8. \end{aligned}$$

a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem linjerne l og m.

3.D1.29 To linjer l og m er givet ved

$$m: \quad y = 2x + 3$$
$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 18 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem m og l.

3.D1.30 To linjer l og m er givet ved

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem m og l.

3.D1.31 En linje l i planen er bestemt ved ligningen

$$4x + 3y = 12.$$

Linjen m er ortogonal på l og går gennem punktet $P(8,10)$.

a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem l og m.

3.D1.32 Linjen l går gennem punkterne $A(1,3)$ og $B(4,6)$.

a) Bestem en parameterfremstilling for l.

Linjen m er givet ved ligningen $y = -x + 8$.

b) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem l og m.

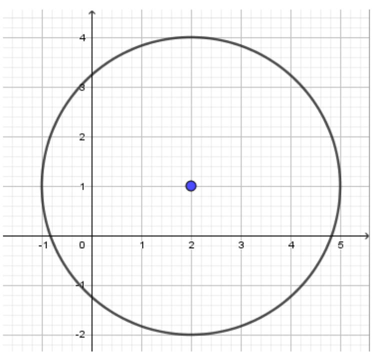
3.D1.33 En cirkel er givet ved ligningen

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 100.$$

a) Argumentér for, at punktet $P(4,20)$ ligger uden for cirklen.

3.D1.34 Figuren viser en cirkel i et koordinatsystem.

a) Bestem en ligning for cirklen.



3.D1.35

En cirkel er givet ved ligningen

$$(x+1)^2+(y-6)^2=9\,.$$

a) Bestem cirklens radius og koordinatsættet til cirklens centrum.

Et punkt *P* er givet ved $P(-3,6)$.

b) Bestem afstanden mellem cirklens centrum og punktet *P*, og benyt denne til at afgøre, om punktet *P* ligger på cirklen.

3.D1.36

En cirkel er bestemt ved ligningen

$$x^2+2x+y^2-4y=4.$$

a) Bestem cirklens radius og koordinatsættet til cirklens centrum.

3.D1.37

En cirkel har centrum i punktet $C(-3,5)$ og radius $r=4$.

a) Opskriv en ligning for cirklen.

3.D1.38

I et koordinatsystem er en cirkel givet ved ligningen

$$x^2-4x+y^2-2y=20\,.$$

Et punkt *P* er givet ved $P(5,5)$.

a) Vis at *P* ligger på cirklen.

b) Bestem en ligning for tangenten til cirklen i *P*.

3.D1.39

En cirkel har centrum i punktet $C(2,3)$ og radius 5.

a) Opskriv en ligning for cirklen.

b) Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem cirklen og linjen med ligningen $y=x$.

3.D1.40 En cirkel har ligningen

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y + 8 = 0.$$

a) Bestem cirklens radius og koordinatsættet til cirklens centrum.

En linje er bestemt ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

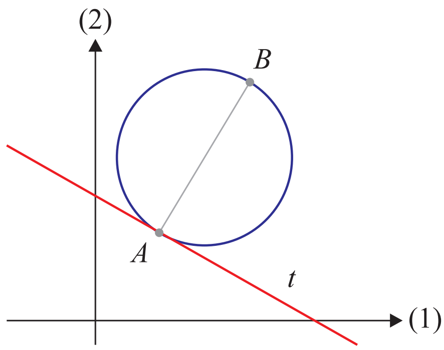
b) Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem cirklen og linjen.

3.D1.41 I et koordinatsystem i planen er givet to punkter $C(1,2)$ og $P(-2,6)$.

a) Opskriv en ligning til cirklen, der går gennem P og har centrum i C.

b) Bestem en ligning for cirklens tangent i P.

3.D1.42 I et koordinatsystem i planen er der givet en cirkel, som går gennem to punkter $A(3,5)$ og $B(9,13)$. Det oplyses, at linjestykket AB er diameter i cirklen (se figuren).



a) Bestem en ligning for cirklen.

Linjen t tangerer cirklen i punktet A.

b) Bestem en ligning for t.

3.D1.43 En cirkel er givet ved ligningen

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y = 5.$$

a) Vis, at punktet $P(1,0)$ ligger på cirklen.

b) Bestem en ligning for tangenten til cirklen i punktet P.

3.D1.44 I et koordinatsystem er der givet et punkt $P(5,4)$ og en linje l med ligningen

$$l\colon \quad x - y + 2 = 0.$$

a) Bestem afstanden fra punktet P til linjen l.

En anden linje m er givet ved parameterfremstillingen

$$m\colon \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Bestem skæringspunktet mellem linjerne l og m.

3.D1.45

To linjer *l* og *m* er givet ved

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 18 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$m: \; 3x + 2y - 25 = 0.$$

a) Gør rede for, at linjerne *l* og *m* er parallelle.

b) Bestem afstanden mellem linjerne *l* og *m*.

3.D1.46

To linjer *l* og *m* i planen er givet ved

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$m: \; 7x + y - 2 = 0.$$

a) Undersøg, om linjerne *l* og *m* er ortogonale.

3.D1.47

To linjer *l* og *m* i planen er givet ved

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

a) Undersøg, om vinklen mellem linjerne *l* og *m* er 90°.

Delprøve 2

3.D2.1 I et koordinatsystem i planen er givet to punkter $A(-3,7)$ og $B(5,-10)$ samt en vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix}-7\\2\end{pmatrix}$.

a) Bestem arealet af parallelogrammet udspændt af $\overrightarrow{AB}$ og $\vec{a}$.

b) Bestem koordinatsættet til projektionen af $\overrightarrow{AB}$ på $\vec{a}$.

3.D2.2 To linjer *l* og *m* i planen er givet ved

$$l: \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\18\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$

$$m: \quad -3x+2y+25=0.$$

a) Bestem den spidse vinkel mellem linjerne *l* og *m*.

3.D2.3 En linje *l* går gennem punktet $P(2,5)$ og har $\vec{n}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ som normalvektor.

a) Bestem projektionen af punktet $A(7,20)$ på linjen *l*.

3.D2.4 I et koordinatsystem er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ bestemt ved

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}t-1\\3\end{pmatrix} \text{ og } \vec{b}=\begin{pmatrix}2t+5\\-2\end{pmatrix}.$$

a) Bestem ved beregning de to værdier for *t*, hvor $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale.

3.D2.5 I et koordinatsystem er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ bestemt ved

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3t+20\\2\end{pmatrix} \text{ og } \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},$$

hvor *t* er et tal.

a) Bestem ved beregning for $t=1$ projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

b) Bestem de værdier af *t*, for hvilke $\vec{a}$ og $\vec{b}$ har samme længde.

3.D2.6 I et koordinatsystem er givet vektorerne

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} t-1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ t \end{pmatrix},$$

hvor t er et tal.

a) Bestem for $t=4$ vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

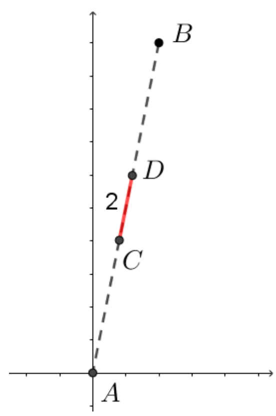
b) Bestem ved beregning de værdier af t, for hvilke $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle.

3.D2.7 To punkter i planen er givet ved $A(3,4)$ og $B(9,10)$.
Midtpunktet af linjestykket AB kaldes M.

a) Bestem koordinatsættet til M.

b) Bestem en ligning for den linje, der går igennem M, og som har hældningen -1.

3.D2.8 Endestolperne af et hegn er i en model placeret i punkterne $A(0,0)$ og $B(2,10)$. Midt på hegnet skal der placeres en låge med bredden 2m, og lågen skal monteres i punkterne C og D (se figuren). Enheden i modellen er meter.



a) Bestem koordinatsættet til punktet C, hvor den ene del af lågen skal monteres.

3.D2.10 I et koordinatsystem er tre punkter givet ved $A(3,0)$, $B(0,5)$ og $C(2,t)$, hvor t er et tal.

a) Bestem $\overrightarrow{AC}$ udtrykt ved t.

b) Bestem arealet af trekant ABC, når $t=4$.

Linjen l er bestemt ved parameterfremstillingen

$$l:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Bestem tallet t, således at linjen l står vinkelret på linjen gennem A og C.

3.D2.11 I et koordinatsystem er givet punkterne $A(0,0)$ og $C(11,2)$ samt linjen *l*, der er bestemt ved parameterfremstillingen

$$l:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Om trekant *ABC* oplyses, at *B* ligger på linjen *l* i første kvadrant og at $|AB| = 10$.

a) Lav en skitse af trekant *ABC*, og bestem vinkel *A* i trekant *ABC*.

b) Bestem koordinatsættet til *B*.

c) Bestem arealet af trekant *ABC*.

3.D2.12 En linje *l* er bestemt ved ligningen

$$y = 3x - 8.$$

a) Bestem projektionen af punktet $P(2,8)$ på linjen *l*.

3.D2.13 I et koordinatsystem er givet punkterne $A(0,3)$ og $B(1,4)$.

a) Bestem en ligning for den rette linje *m*, der går gennem *A* og *B*.

Linjen *l* er bestemt ved parameterfremstillingen

$$l:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} k^2 - 1 \\ k \end{pmatrix},$$

hvor *k* er en konstant.

b) Bestem *k*, så *l* og *m* er ortogonale.

3.D2.14 I et koordinatsystem er to punkter givet ved $A(-3,4)$ og $B(1,5)$.
Linjen gennem *A* og *B* kaldes for *m*.

a) Gør rede for at punktet $P(21,10)$ ligger på *m*.

Linjen *l* er bestemt ved parameterfremstillingen

$$l:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ k \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix},$$

hvor *k* er en konstant.

b) Bestem værdien af *k*, så linjerne *l* og *m* skærer hinanden i punktet $P(21,10)$.

3.D2.15 I et koordinatsystem i planen, har en cirkel centrum i $C(1,-1)$ og radius 5.

a) Gør rede for, at $x^2 - 2x + y^2 + 2y - 23 = 0$ er en ligning for cirklen.

Linjen *l* er bestemt ved ligningen

$$l:\ x - 7y + 17 = 0.$$

b) Bestem ved beregning koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem cirklen og linjen *l*.

3.D2.16 I et koordinatsystem i planen er givet to punkter $C(-1, 4)$ og $P(2, 8)$.

a) Opskriv en ligning for den cirkel, der går gennem *P* og har centrum i *C*.

En linje i planen er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix},$$

b) Bestem koordinatsættet til hvert af linjens skæringspunkter med cirklen.

3.D2.17 En cirkel har centrum i $C(1,-2)$ og går gennem punktet $P(4,2)$.

a) Bestem en ligning for cirklen.

b) Bestem en ligning for tangenten til cirklen i punktet *P*.

Linjen *l* er bestemt ved ligningen

$$4x + 3y + 27 = 0.$$

c) Gør rede for, at *l* også er en tangent til cirklen.

3.D2.18 En cirkel er givet ved ligningen

$$x^2 + 2x + y^2 - 6y = 15,$$

og en linje er givet ved ligningen

$$x - 2y + 2 = 0.$$

a) Bestem koordinatsættet til hvert af cirklens skæringspunkter med linjen.

Skæringspunktet med den mindste førstekoordinat kaldes *Q*.

b) Bestem en ligning for tangenten til cirklen i *Q*.

3.D2.19 En cirkel er givet ved ligningen

$$(x+2)^2+(y-5)^2=25 \ ,$$

og en linje l er givet ved

$$4x-3y+k=0,$$

hvor k er en konstant.

a) Bestem skæringspunkterne mellem cirklen og linjen l, når $k=23$.

Der er to værdier af k, for hvilke linjen l er tangent til cirklen.

b) Bestem de to værdier af k.

3.D2.20 En cirkel har centrum i $C(4,3)$ og radius $r=\sqrt{8}$.

a) Bestem en ligning for cirklen.

Cirklen har to tangenter m_1 og m_2, der er parallelle med vektoren $\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

b) Bestem koordinatsættet til hvert af røringspunkterne for m_1 og m_2.

3.D2.21 En cirkel er givet ved ligningen

$$x^2-6x+y^2+2y+1=0.$$

a) Bestem cirklens radius og koordinatsættet til cirklens centrum.

b) Undersøg ved beregning, om linjen med ligningen $3x-4y+3=0$ er en tangent til cirklen.

3.D2.22 I et koordinatsystem er der givet to punkter $C(5,4)$ og $P(9,3)$.

a) Bestem en ligning for den cirkel, der har centrum i C og som går gennem punktet P.

b) Bestem en ligning for tangenten t til cirklen i punktet P.

En anden tangent til cirklen er parallel med t.

c) Bestem koordinatsættet til denne tangents røringspunkt med cirklen.

3.D2.23 En linje *l* er givet ved ligningen

$$y = 3x + 10\,.$$

To linjer *n* og *m* er begge parallelle med linje *l* og ligger i en afstand på 5 fra linjen *l*.

a) Bestem en ligning for hver af de to linjer *l* og *m*.

3.D2.24 En linje *l* er givet ved ligningen $3x + 5y - 7 = 0$ og et punkt *P* er givet ved $P(2,k)$, hvor *k* er et tal.

a) Bestem *k*, så afstanden fra *P* til *l* er 3.

3.D2.25 En linje *l* er givet ved ligningen $y = 3x + 10$, og en lodret linje *m* er givet ved ligningen $x = 4$.

a) Bestem den spidse vinkel mellem linjerne *l* og *m*.

3.D2.26 I et koordinatsystem er linjen *l* bestemt ved parameterfremstillingen

$$l:\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

og linjen *m* er bestemt ved ligningen

$$m:\quad 5x - y + 4 = 0.$$

a) Bestem den spidse vinkel mellem *l* og *m*.

3.D2.27 I et koordinatsystem er linjen *l* bestemt ved ligningen

$$2x - y - 6 = 0\,.$$

Linjen *m* går gennem koordinatsystemets begyndelsespunkt *O* og punktet $P(7,3)$.

a) Bestem den spidse vinkel mellem linjen *l* og linjen *m*.

b) Bestem en ligning for den cirkel, der har centrum i *P*, og som tangerer *l*.

c) Bestem koordinatsættet til det punkt *Q*, som er projektionen af *P* på linjen *l*.

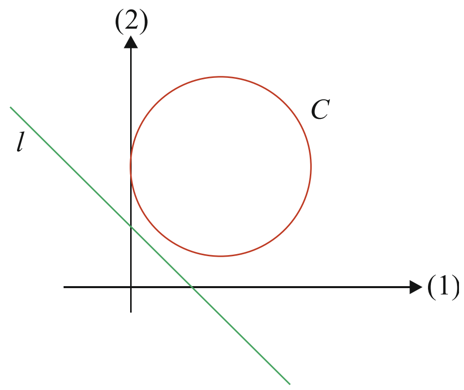
3.D2.28 I et koordinatsystem er cirklen C bestemt ved ligningen

$$(x-3)^2+(y-4)^2=9,$$

og linjen l er bestemt ved ligningen

$$2x+2y-4=0.$$

Linjen m går gennem centrum for C og står vinkelret på l.



a) Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem m og C.

b) Bestem afstanden fra l til det punkt på cirklen C, der er tættest på l.

3.D2.29 I et koordinatsystem i planen er givet to punkter $A(1,1)$ og $B(5,3)$. Linjen l går gennem A og B.

a) Bestem en ligning for l på formen $a\cdot x+b\cdot y+c=0$.

En parabel har ligningen

$$y=x^2-8x+13,5.$$

b) Bestem afstanden mellem linjen l og parablens toppunkt.

c) Bestem koordinatsættet til projektionen af parablens toppunkt på l.

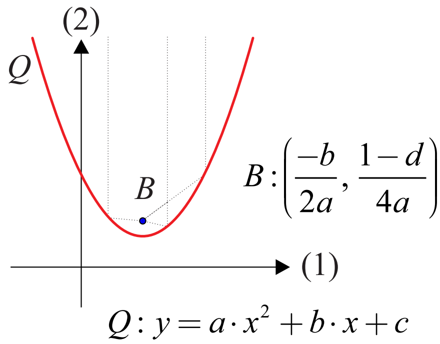
3.D2.30 En parabel P er bestemt ved ligningen

$$P: y=2x^2-12x+19\ .$$

a) Bestem koordinatsættet til toppunktet T for parablen P.

Det oplyses, at koordinatsættet til brændpunktet B for en parabel, der er bestemt ved ligningen $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, kan bestemmes ved

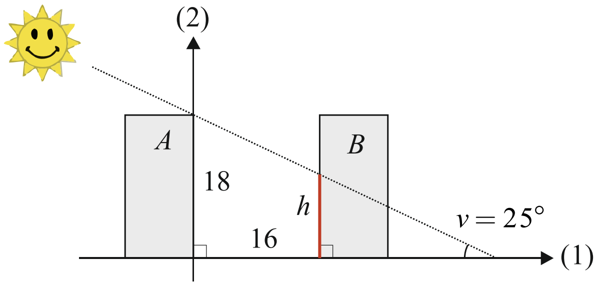
$$B\left(\frac{-b}{2a},\frac{1-d}{4a}\right).$$



b) Bestem koordinatsættet til brændpunktet B for parablen P.

c) Bestem afstanden mellem toppunktet T og brændpunktet B.

3.D2.31



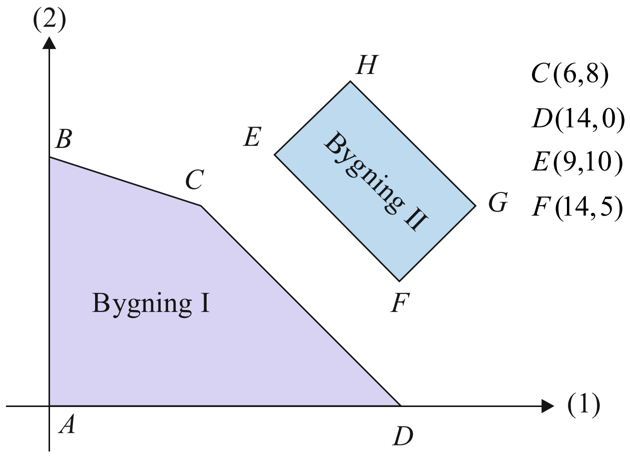
To bygninger A og B er begge 18 meter høje og har en indbyrdes afstand på 16 meter.

På et givet tidspunkt har solen en elevationsvinkel på $v = 25°$ og står i lige linje med de to gavle på bygning A og B. Skyggen fra bygning A følger en linje l og rammer på dette tidspunkt bygning B i en bestemt højde h (se figuren).

a) Bestem en parameterfremstilling for linjen l.

b) Bestem skyggens højde h på bygning B.

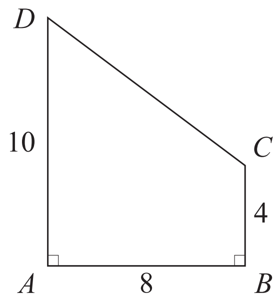
3.D2.32 Figuren viser en model af to bygningers grundplan indtegnet i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser.



a) Gør redefor, at $\overrightarrow{CD}$ og $\overrightarrow{EF}$ er parallelle.

b) Benyt modellen til at bestemme afstanden mellem de to bygninger.

3.D2.33 En indhegning har form som vist på figuren. Nogle af målene er angivet på figuren.

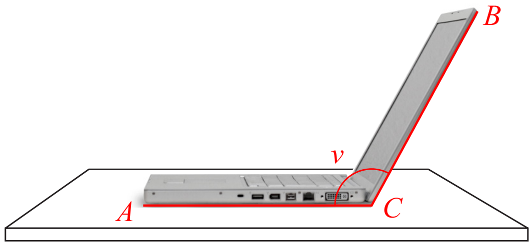


a) Indlæg en model af indhegningen i et koordinatsystem, hvor koordinatsættet for punktet A er $A(0,0)$.

b) Bestem koordinatsættene for vektorerne $\overrightarrow{CB}$ og $\overrightarrow{CD}$ i din model.

c) Beregn indhegningens omkreds.

3.D2.34



På figuren ses en model af en bærbar computer set fra siden på et bord.
Dybden $\left|\overrightarrow{AC}\right|$ af computeren er 22 cm. Desuden gælder, at $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$, og skærmens øverste top B er 17,2 cm over bordet.

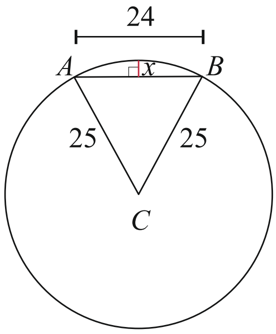
a) Indlæg en model af computeren i et koordinatsystem, så C ligger i origo.

b) Bestem koordinatsættene til stedvektorerne $\overrightarrow{CA}$ og $\overrightarrow{CB}$ i din model.

c) Bestem den vinkel v, hvormed skærmen på computeren er vippet.

3.D2.35

Foto: www.colourbox.dk



Ovenstående figur viser en model af et tværsnit af en træstamme. Tværsnittet har form som en cirkelskive med centrum i punktet *C*. Det øverste træstykke er blevet fraskåret i et vandret snit ved punkterne *A* og *B*.

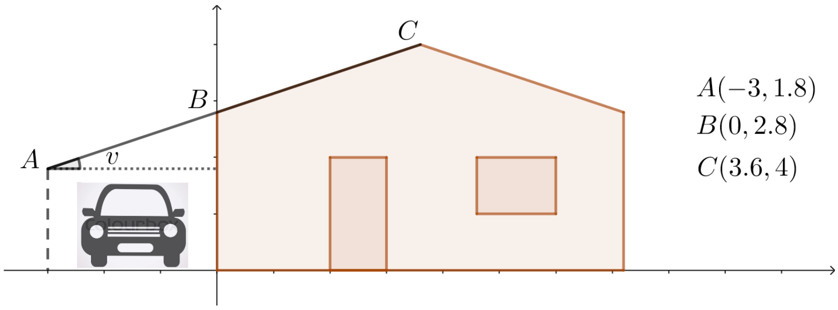
Det oplyses, at træstammen har en radius på 25 cm, og at bredden på det vandrette snit *AB* er 24 cm (se figuren).

a) Indlæg modellen i et koordinatsystem, hvor punktet *C* ligger i $(0,0)$.

b) Bestem en ligning for cirklen i modellen.

c) Bestem koordinatsættet for punktet *B*, og bestem højden *x* på det fraskårne træstykke.

3.D2.36

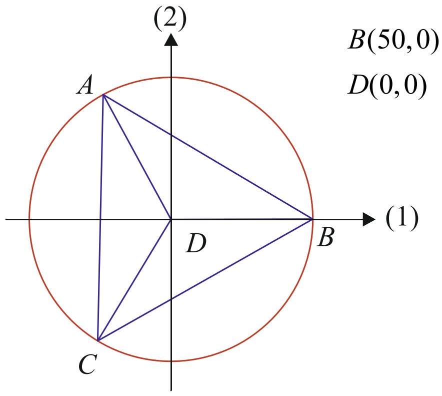


På figuren ses en model af en husgavl med tilhørende carport indlagt i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser. Carportens tag *BA* er udført i forlængelse af husets tag *CB*.

a) Gør rede for, at carportens og husets tag er en del af den samme rette linje.

b) Bestem hældningsvinklen *v* på carportens tag.

3.D2.37



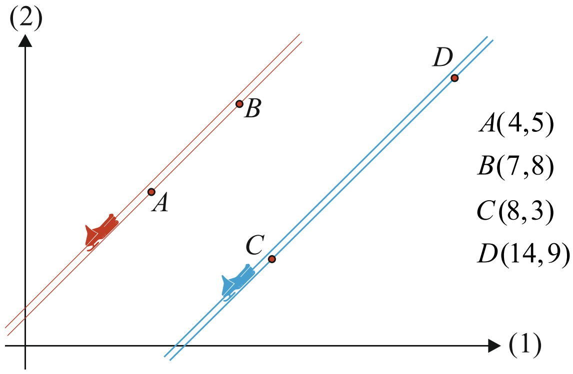
På figuren ses en model af et cirkelformet cafébord (set oppefra) indlagt i et koordinatsystem. Bordets radius er 50 cm, og i modellen er der indtegnet en ligesidet trekant ABC, der igen er delt op i 3 kongruente og ligebenede trekanter ABD, BDC og CDA. De tre punkter A, B og C ligger på cirkelperiferien (se figuren).

a) Bestem $\angle ADB$.

b) Bestem koordinatsættet til punktet A.

c) Bestem omkredsen af trekant ABC.

3.D2.38 Figuren viser en model af spor i sneen fra to snescootere indlagt i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser.



I modellen følger den venstre mede for hver af de to snescootere henholdsvis sporet gennem A og B og henholdsvis sporet gennem C og D.
Det antages, at medernes spor i modellen begge følger en ret linje.

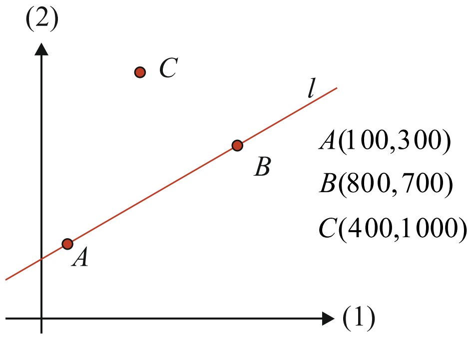
a) Bestem en ligning for den linje som sporet AB er en del af.

b) Vis, at de to snescootere har kørt parallelt.

c) Bestem den korteste afstand mellem de to spor AB og CD i modellen.

3.D2.39

Foto: www.colourbox.dk



På figuren ses en model af en vejstribe på en landevej indlagt i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser. I modellen følger en del af vejstriben den rette linje l, der går gennem punkterne A og B.

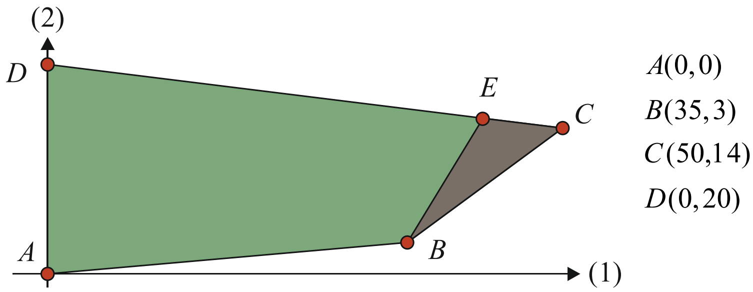
a) Bestem en ligning for l.

Det oplyses, at en person står stille i punktet C.

b) Bestem afstanden mellem personen og en bil, der befinder sig i punktet A.

c) Benyt modellen til at bestemme den korteste afstand mellem personen og vejstriben.

3.D2.40



På figuren ses en model af en græsplæne i en park indlagt i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser. I modellen har græsplænen form som firkant $ABCD$.

Mellem punkterne C og D skal der opsættes et hegn.

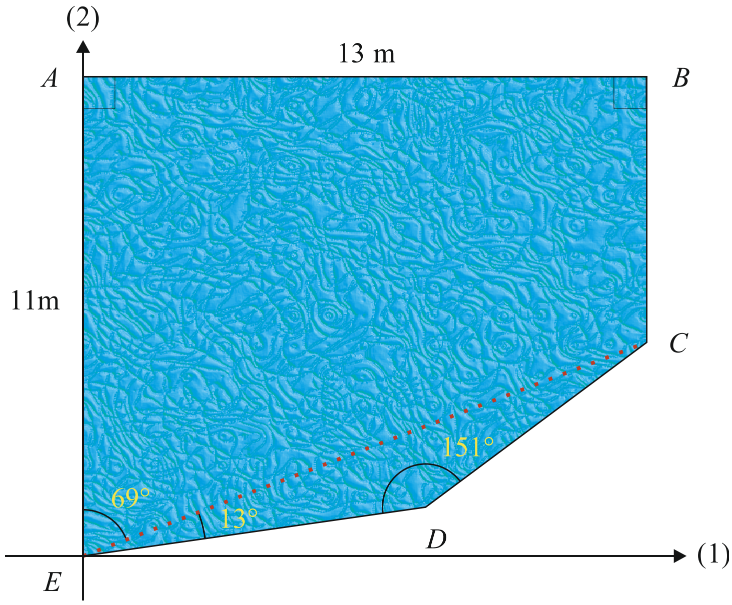
a) Bestem længden af hegnet.

b) Bestem en parameterfremstilling for den linje, der følger hegnet.

I parken skal der bygges en trekantet scene, som i modellen har hjørnepunkterne B, C og E. Punktet E ligger på linjen mellem C og D (se figur).

c) Bestem koordinatsættet til punktet E, så arealet af scenen bliver 50 m^2.

3.D2.41



Figuren viser et svømmebassin, hvor der er udspændt et banetov til afgrænsning af et trekantet område, hvori der opbevares legeredskaber.

En model af svømmebassinet er indlagt i et koordinatsystem med enheden meter. Alle kendte mål er angivet på figuren.

a) Bestem koordinaterne til punktet *C*.

b) Bestem $\left|\overrightarrow{CE}\right|$, og forklar tallets betydning.

c) Bestem koordinatsættet til den enhedsvektor $\vec{e}$, som er ensrettet med $\overrightarrow{ED}$.

d) Bestem arealet af det trekantede område *CDE*, som banetovet afgrænser vha. en determinant.

4. Statistik og regressionsanalyse

Delprøve 1

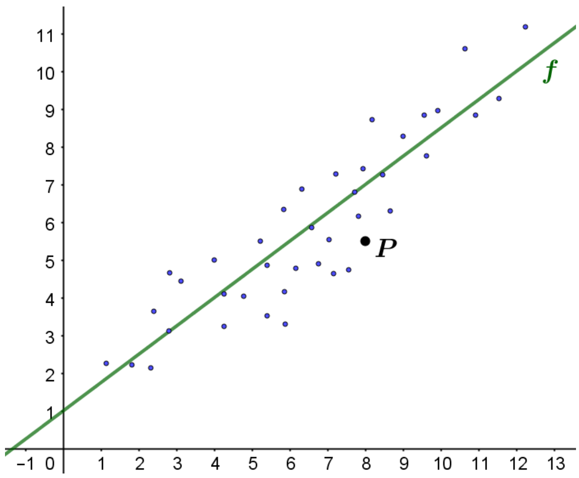
4.D1.1

På en bestemt skole har man målt højden af hver elev. Målingerne blev sorteret i intervaller af længde 10 cm, startende med 150 cm. Den mindste elev var 152 cm høj, og den højeste elev var 205 cm høj. Endvidere fandt man følgende kvartilsæt for elevernes højdefordeling: 162, 175, 184.

a) Tegn en mulig sumkurve for højdefordelingen af eleverne.

4.D1.2

På figuren ses datapunkter for en sammenhæng mellem x og y samt grafen for en lineær regressionsmodel f for sammenhængen.



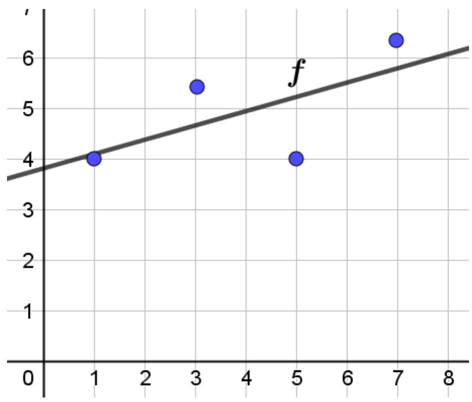
Det oplyses, at forskriften for funktionen f er givet ved

$$f(x) = 0{,}75x + 1.$$

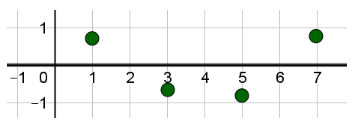
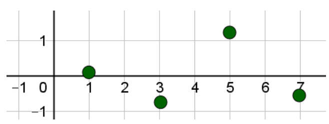
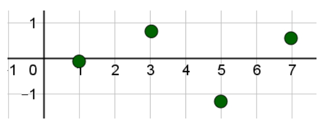
a) Bestem residualet hørende til punktet $P(8; 5{,}5)$.

4.D1.3

På figur ses 4 punkter fra et datasæt og en tilhørende lineær model *f*.

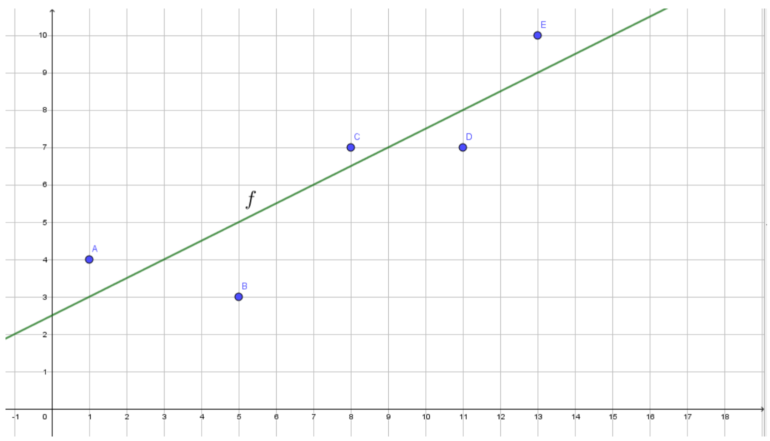


a) Gør rede for hvilket af nedenstående residualplots, der beskriver sammenhængen mellem datasættet og modellen.

A	*B*	*C*
		

4.D1.4

I en model kan sammenhængen mellem *x* og *y* beskrives ved en lineær funktion *f*. Figuren viser et punktplot for sammenhængen mellem *x* og *y* samt grafen for *f*.



a) Tegn et residualplot hørende til sammenhængen mellem *x* og *y*, og bestem den største afvigelse mellem de observerede værdier for *y* og de tilsvarende modelværdier for *y*.

Delprøve 2

4.D2.1 Tabellen viser sammenhørende data for længden af en bestemt type fisk (målt i g) og indhold af kviksølv i fisken (målt i ppm).

Til opgaven hører bilag.

Længde (cm)	47	48,7	…	41,7	36
Kviksølv (ppm)	1,6	1,5	…	1,4	0,92

(Hele tabellen med alle 171 datapunkter findes i bilaget *Kviksølv i fisk.xlsx*)

I en model antages det, at sammenhængen mellem længden af en fisk og dens indhold af kviksølv kan beskrives ved en lineær funktion

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor x betegner længden af fisken (målt i cm), og $f(x)$ betegner indholdet af kviksølv i fisken (målt i ppm).

a) Bestem tallene a og b.

b) Bestem residualspredningen s.

c) Bestem, hvor mange procent af residualerne, der ligger inden for intervallet $[-2s; 2s]$.

4.D2.2

Grafik: www.colourbox.dk

Tabellen viser aldersfordelingen for Danmarks befolkning i 2016.

Alder (år)	0 – 20	20 – 40	40 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 110
Frekvens (%)	23,36	24,42	27,37	11,97	8,53	3,51	0,84

a) Bestem de kumulerede frekvenser, og tegn sumkurven for fordelingen.

For at øge udbuddet af arbejdskraft, overvejes det at sætte pensionsalderen op fra 65 år til 67 år. Det oplyses, at befolkningstallet i Danmark i 2016 var 5,7 mio.

b) Bestem ændringen i antallet af danskere over pensionsalderen, hvis pensionsalderen var blevet sat op fra 65 år til 67 år.

Kilde: www.globalis.dk/Lande/Danmark og Verdensbanken

4.D2.3

Foto: www.colourbox.dk

Old Faithful geyseren i Yellowstone National Park kommer jævnligt i udbrud. Tabellen viser sammenhørende værdier for ventetiden til et udbrud og varigheden af udbruddet.

Til opgaven hører et bilag

Ventetiden til et udbrud (minutter)	64	65	…	94	96
Varigheden af udbruddet (minutter)	3,4	3,8	…	4,8	5,1

(*Hele tabellen med alle* 175 *datapunkter findes i bilaget ”Old Faithful geyser data.xlsx”*)

I en model antages det, at sammenhængen mellem ventetiden til et udbrud og varigheden af et udbrud kan beskrives ved en lineær funktion

$$f(x) = a \cdot x + b$$

hvor x betegner ventetiden til et udbrud (målt i minutter), og $f(x)$ betegner varigheden af udbruddet (målt i minutter).

a) Bestem tallene a og b ved regression.

b) Bestem residualspredningen s.

c) Gør rede for, at ca. 95% af residualerne ligger i intervallet $[-2s; 2s]$.

Kilde: Azzalini, A. and Bowman, A. W. (1990). A look at some data on the Old Faithful geyser. Applied Statistics, 39, 357–365

4.D2.4

Foto: www.colourbox.dk

Nedenstående tabel viser udviklingen i kornproduktionen i et bestemt land i perioden $1961-2016$.

Til opgaven hører et bilag.

År	1961	1962	…	2015	2016
Kornproduktion	65,86	74,19	…	284,17	291,95

(Hele tabellen med alle 56 datapunkter findes i bilaget Korndata.xlsx)

I en model kan udviklingen i kornproduktionen beskrives ved

$$f(t) = a \cdot t + b,$$

hvor $f(t)$ betegner kornproduktionen (målt i mio. ton) i landet til tidspunktet t (målt i år efter 1961).

a) Benyt lineær regression på tabellens data, og tegn residualplottet.

b) Benyt residualplottet og residualspredningen til at vurdere modellens anvendelighed til at beskrive udviklingen.

4.D2.5

Foto: www.colourbox.dk

Nedenstående tabel viser udviklingen i arbejdsstyrken i et bestemt land i perioden 1990 - 2018.

Til opgaven hører et bilag.

År	1990	1991	…	2017	2018
Arbejdsstyrke (mio.)	13,72	13,91	…	19,91	20,11

(Hele tabellen med alle 29 datapunkter findes i bilaget Arbejdsstyrkedata.xlsx)

I en model kan udviklingen i arbejdsstyrken beskrives ved

$$f(t) = a \cdot t + b,$$

hvor $f(t)$ betegner arbejdsstyrken (målt i mio. personer) i landet til tidspunktet t (målt i år efter 1990).

a) Benyt lineær regression på tabellens data, og tegn residualplottet.

b) Benyt residualplottet og residualspredningen til at vurdere modellens anvendelighed til at beskrive udviklingen.

4.D2.6

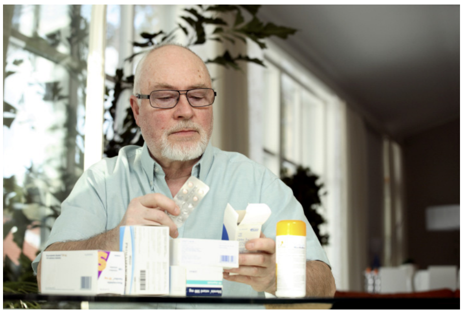


Foto: www.colourbox.dk

I et studie har man undersøgt sammenhængen mellem alder og kolesteroltal. Tabellen herunder viser de målte data fra studiet.

Til opgaven hører et bilag

Alder (år)	29	34	…	71	71
Kolesteroltal (mg/dL)	204	182	…	302	265

(Hele tabellen med alle 100 *datapunkter findes i bilaget "Kolesterol.xlsx")*

I en model antages det, at sammenhængen mellem alder og kolesteroltal kan beskrives ved en lineær funktion

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor $f(x)$ betegner kolesteroltallet (målt i mg/dL) for en person, der er x år gammel.

a) Benyt lineær regression til at redegøre for at $a = 1{,}811$ og $b = 150{,}5$.

I bilaget *"Kolesterol.xlsx"* er de enkelte residualer også angivet.

b) Bestem residualspredningen s.

c) Gør rede for at mindst 95% af residualerne ligger i intervallet $[-2s;\, 2s]$.

4.D2.7

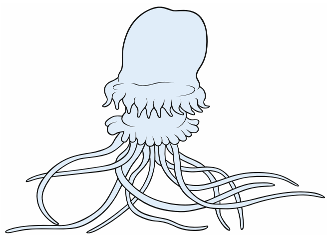


Foto: www.colourbox.dk

Tabellen viser sammenhørende værdier fra et bestemt havområde for en vandmands bredde og længden på dens tilhørende længste tentakel (føletråd).

Bredde på vandmand (målt i mm)	12	15	14	…	19	20
Længde af tentakel (målt i mm)	14	16	16,5	…	22	22

(*Hele tabellen med alle* 24 *datapunkter findes i bilaget VandMænd.xlsx*)

Til opgaven hører et bilag

I en model kan sammenhængen mellem vandmandens bredde og længden af den længste tentakel beskrives ved

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor $f(x)$ betegner længden af en vandmands længste tentakel (målt i mm), og x betegner bredden af en vandmand (målt i mm).

a) Benyt lineær regression til at bestemme konstanterne a og b, og tegn et residualplot.

b) Vurdér modellens anvendelighed ud fra residualplottet og residualspredningen.

c) Tegn et boksplot over fordelingen af residualer, og undersøg om der er outliers.

5. Kombinatorik, sandsynlighedsregning, test og konfidensinterval

Delprøve 1

5.D1.1

Når man køber en bestemt bil skal man vælge mellem 10 forskellige lakeringer og 5 forskellige indtræk.

a) Bestem antallet af mulige måder, hvorpå der kan vælges en lakering og et indtræk til en bil.

5.D1.2

En gruppe børn laver et lykkehjul med mulige udfald A, B, C og D, som de vil benytte på det lokale kræmmermarked.

Tabellen nedenfor viser sandsynlighedsfeltet for den stokastiske variabel X, der angiver gevinststørrelse (målt i kr.) for de fire mulige udfald.

	A	B	C	D
Gevinst (kr.)	-5	4	5	20
Sandsynlighed	0,6	0,2	p	0,1

a) Bestem den manglende sandsynlighed p.

b) Bestem den gevinststørrelse, som spillerne i gennemsnit tjener pr. spil.

Børnene vil ændre på spillet, så de i gennemsnit tjener 1 kr. pr. spil. De vil derfor justere gevinststørrelsen for udfaldet D.

c) Bestem den gevinststørrelse udfaldet D skal have.

5.D1.3

En stokastisk variabel X er binomialfordelt med antalsparameter 20 og sandsynlighedsparameter $\frac{1}{4}$.

a) Bestem middelværdien for X.

b) Afgør om spredningen for X er større end 4.

5.D1.4

For en binomialfordelt stokastisk variabel X er sandsynligheden for $X = 5$ givet ved

$$P(X = 5) = K(12,5) \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^7.$$

a) Angiv sandsynlighedsparameteren og antalsparameteren for X.

5.D1.5

En stokastisk variabel X er binomialfordelt med antalsparameter 10 og sandsynlighedsparameter 0,7.

a) Argumentér for, hvilken af de to sandsynligheder $P(X = 7)$ og $P(X = 8)$, der er størst.

5.D1.6

En valgforsker ønsker at undersøge, om tilslutningen til et bestemt parti har ændret sig, i den tid der er gået, siden sidste folketingsvalg.
Ved sidste folketingsvalg fik partiet 59% af stemmerne.

a) Opstil forskerens nulhypotese.

På baggrund af en opinionsundersøgelse udregnede forskeren 95%-konfidensintervallet $[0,52;0,57]$ for andelen af personer, der stemmer på partiet.

b) Argumentér ud fra 95% konfidensintervallet, om vælgertilslutningen til partiet har ændret sig.

5.D1.7

En stokastisk variabel X er binomialfordelt med antalsparameter 3 og sandsynlighedsparameter 0,5.

a) Bestem sandsynligheden $P(X=0)$.

5.D1.8

En stokastisk variabel X er binomialfordelt med antalsparameter 12 og en ukendt sandsynlighedsparameter p.
To af sandsynlighederne for X er bestemt ved $P(X \leq 7) = 0{,}56$ og $P(X \geq 9) = 0{,}23$.

a) Bestem sandsynligheden $P(X=8)$.

5.D1.9

Foto: www.colourbox.dk

En symmetrisk sekssidet terning kastes 180 gange.

a) Bestem det mest sandsynlige antal seksere.

b) Bestem de antal af seksere, der vil kunne betegnes som exceptionelle udfald i eksperimentet.

5.D1.10

En stor undersøgelse har vist, at 30% af unge i gymnasiet ryger ofte eller en gang i mellem.
På et gymnasium udvælges 7 elever tilfældigt til en arbejdsgruppe. Den stokastiske variabel X angiver antal rygere blandt de 7 elever.

Tabellen viser sandsynlighedstabellen hørende til X.

Antal rygere	0	1	2	3	4	5	6	7
Sandsynlighed	8,2%	24,7%	31,8%	22,7%	9,7%	2,5%	0,4%	0,0%

a) Tegn et søjlediagram for fordelingen af X.

b) Bestem sandsynligheden for, at der er mindst en ryger i gruppen.

Delprøve 2

5.D2.1 I et køkkenskab står der 15 tallerkener, hvor 3 af dem er skåret.
Man vil dække et bord med 3 tallerkner, som vælges tilfældigt blandt de 15 tallerkener i køkkenskabet.

a) Bestem sandsynligheden for, at bordet dækkes uden skårede tallerkener.

Man vil dække et bord med 5 tallerkener, som vælges tilfældigt blandt de 15 tallerkener i køkkenskabet.

b) Bestem sandsynligheden for, at bordet dækkes med 2 skårede tallerkener.

c) Bestem sandsynligheden for, at bordet dækkes uden skårede tallerkener.

5.D2.2

Foto: www.colourbox.dk

Et sædvanligt spil kort består af 52 kort fordelt på 4 kulører (hjerter, ruder, spar og klør). I hver kulør er der tre billedkort: Knægt, dame, konge.
I et bestemt pokerspil består en hånd af 5 kort ud af 52 mulige kort fra et sædvanligt spil kort.

a) Bestem antallet af mulige hænder i poker.

En bestemt hånd A består af tre knægte og to 5'ere.

b) Bestem sandsynligheden for at få en sådan hånd.

En anden hånd B består af 4 esser og en 10'er.

c) Bestem sandsynligheden for at få hånd A eller hånd B.

5.D2.3 I en population er der 40 planter.

a) Bestem antallet af stikprøver med 8 planter.

Blandt de 40 planter er der 18 planter med store blade og 22 planter med små blade.

b) Bestem sandsynligheden for, at en stikprøve består af 3 planter med store blade og 5 planter med små blade.

5.D2.4 En stokastisk variabel X er binomialfordelt med antalsparameter 20 og sandsynlighedsparameter 0,24.

a) Bestem $P(X=9)$.

b) Bestem $P(X \leq 7)$.

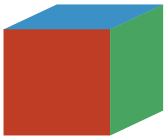
c) Bestem $P(7 \leq X \leq 10)$.

5.D2.5 Om en bestemt sygdom antages, at 1 ud af 10000 personer rammes af sygdommen.
En by med 62000 indbyggere rammes af sygdommen.

a) Bestem sandsynligheden for, at netop 2 indbyggere i byen rammes af sygdommen.

b) Bestem det mest sandsynlige antal indbyggere, der vil rammes af sygdommen.

5.D2.6



Figuren viser en sekssidet terning, hvor to af siderne er røde, to af siderne er blå og to af siderne er grønne.

Terningen kastes en enkelt gang.

a) Bestem sandsynligheden for, at terningen lander på en blå side.

Terningen kastes 20 gange.

b) Bestem sandsynligheden for, at terningen netop 6 gange lander på en blå side.

c) Bestem sandsynligheden for, at terningen mindst 6 gange lander på en blå side.

5.D2.7

Foto: www.colourbox.dk

I 2016 var 18% af Danmarks gymnasieelever rygere. Der udtages en stikprøve på 882 personer blandt Danmarks gymnasieelever.

a) Indfør en stokastisk variabel, og opstil en binomialmodel for antallet af rygere i stikprøven.

b) Bestem sandsynligheden for, at højst 150 af eleverne i stikprøven er rygere.

5.D2.8

Foto: www.colourbox.dk

Prøven fra en frøhøst har vist, at frøene har en spiringsevne på 88%, dvs. sandsynligheden er 88% for, at et frø spirer, når det er sået.

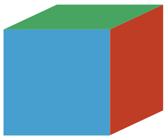
a) Bestem sandsynligheden for, at højst 83 frø spirer, når der sås 100 frø.

b) Bestem sandsynligheden for, at mindst 88 og højst 94 frø spirer, når der sås 100 frø.

Man ønsker, at der er mindst 90% sandsynlighed for at 70 eller flere frø spirer.

c) Hvis dette ønske skal opfyldes, hvor mange frø kan man så nøjes med at så?

5.D2.9



Figuren viser en sekssidet symmetrisk terning, hvor to af siderne er røde, to af siderne er blå og to af siderne er grønne.

Terningen kastes 50 gange.

a) Bestem sandsynligheden for, at terningen netop 10 gange lander på en blå side.

Terningen kastes n gange, og der skal gælde, at sandsynligheden for at terningen netop 10 gange lander på en blå side, er lig med mindst 0,1.

b) Bestem de mulige værdier af n for antal gange terningen skal kastes.

5.D2.10 Ved sidste valg fik partiet H 48% af stemmerne. Vi ønsker at undersøge, om tilslutningen til partiet har ændret sig.

a) Opstil en nulhypotese for undersøgelsen.

Der foretages en vælgerundersøgelse blandt 1005 personer, der viser, at 408 personer vil stemme på partiet H.

b) Benyt et binomialtest med et 5% signifikansniveau til at vurdere, om tilslutningen til partiet H har ændret sig.

5.D2.11

Grafik: www.colourbox.dk

I et krydsningsforsøg med en bestemt type ærter ønsker man at undersøge, hvorvidt farven på bælgen følger Mendels love, der siger, at 25% vil være gule, og 75% vil være grønne. I det konkrete forsøg observerede man, at der var 428 grønne og 152 gule.

a) Opstil en nulhypotese.

b) Bestem de forventede værdier under antagelse af nulhypotesen.

c) Benyt et binomialtest til at undersøge, om man kan forkaste nulhypotesen på et 5% signifikansniveau.

5.D2.12

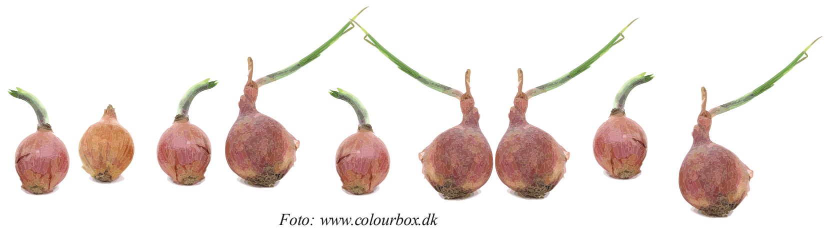


Foto: www.colourbox.dk

Et gartneri reklamerer med, at for en bestemt slags løg vil 9 ud af 10 løg spire.
En kunde køber 50 af de pågældende løg fra gartneriet.

a) Indfør en stokastisk variabel, og opstil en binomialmodel.

Det viser sig, at kun 42 af kundens indkøbte løg spirer.

b) Bestem sandsynligheden for, at der ud af 50 tilfældige løg af denne slags fra gartneriet netop er 42, der spirer.

c) Benyt et tosidet binomialtest med et 5% signifikansniveau til at vurdere, om gartneriets reklame er troværdig.

5.D2.13 Vi er interesserede i at undersøge, om en bestemt mønt er ærlig.

a) Opstil en nulhypotese for undersøgelsen.

Mønten kastes 110 gange. I 50 af kastene viser mønten krone.

b) Benyt et binomialtest med et 5% signifikansniveau til at vurdere, om mønten er ærlig.

5.D2.15 Ved sidste valg fik partiet G 78% af stemmerne. Vi ønsker at undersøge, om vælgertilslutningen til partiet G er gået tilbage.
Ved en vælgerundersøgelse blandt 988 personer sagde 752 personer, at de ville stemme på partiet G.

a) Opstil en nulhypotese, der kan anvendes til at teste om tilslutningen til partiet G er ændret.

b) Benyt et binomialtest med et 1% signifikansniveau til at vurdere, om tilslutningen til partiet G er ændret.

5.D2.16 For en bestemt sekssidet terning ønsker vi at undersøge nulhypotesen:

”Terningen viser i gennemsnit en 5’er i hvert sjette kast”

Terningen kastes 120 gange. I 22 af kastene viser terningen en 5’er.

a) Benyt et binomialtest med et 1% signifikansniveau til at vurdere, om nulhypotesen kan forkastes.

5.D2.17

Grafik: www.colourbox.dk

På baggrund af en meget stor undersøgelse antages det, at 88% af den samlede population af gymnasieelever i en bestemt kommune dyrkede motion i deres fritid i 2010.
I 2016 udtog man en stikprøve på 200 gymnasieelever i kommunen og spurgte dem, om de dyrkede motion i deres fritid. I stikprøven var der 169, der dyrkede motion i deres fritid.

a) Bestem ud fra stikprøven i 2016 et 95%-konfidensinterval for andelen af gymnasieelever i kommunen, der dyrker motion i deres fritid.

b) Undersøg, om man på baggrund af konfidensintervallet kan konkludere, at andelen af gymnasieelever i kommunen, der dyrker motion i deres fritid, har ændret sig.

5.D2.18

Foto: www.colourbox.dk

På baggrund af en stor undersøgelse antages det, at 34% af de 8-årige i Danmark havde en mobiltelefon i 2011.
I 2016 ønskede man at undersøge, om andelen af 8-årige med mobiltelefon havde ændret sig. Man udtog en stikprøve på 200 blandt 8-årige i Danmark i 2016. I stikprøven havde 40% en mobiltelefon.

a) Bestem 95%-konfidensintervallet for andelen af de 8-årige med mobiltelefon i 2016.

b) Gør med udgangspunkt i konfidensintervallet rede for, at man ikke ud fra stikprøven kan konkludere, at andelen af 8-årige med mobiltelefon har ændret sig fra 2011 til 2016.

En anden stikprøve fra 2016 viste også, at andelen af 8-årige med mobiltelefon var 40%. Her kunne man imidlertid med udgangspunkt i 95%-konfidensintervallet konkludere, at andelen af 8-årige med mobiltelefon havde ændret sig siden 2011.

c) Hvor stor må denne anden stikprøve mindst have været?

5.D2.19 En stokastisk variabel X er binomialfordelt med antalsparameter 30 og sandsynlighedsparameter 0,6.

a) Tegn et søjlediagram for fordelingen af X.

b) Bestem middelværdien μ og spredningen σ for X.

5.D2.20 En stokastisk variabel X er binomialfordelt med antalsparameter 10 og sandsynlighedsparameter 0,5.

a) Tegn et søjlediagram for fordelingen af X.

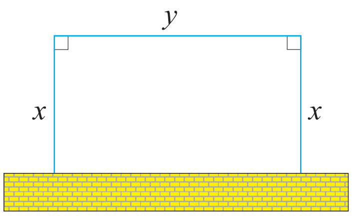
b) Bestem de værdier af X, der har en sandsynlighed større end 12%.

6. Broer

Delprøve 1

6.D1.1

På figuren ses en rektangulær løbegård til en hund. Løbegården skal bygges op ad en mur, og de tre øvrige sider skal dannes af et 20 m langt hegn. Løbegårdens længde betegnes med y, og løbegårdens bredde betegnes med x.

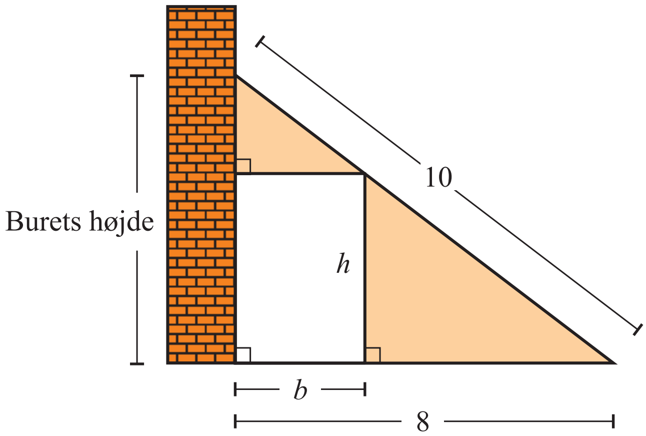


a) Bestem y udtrykt ved x.

b) Bestem x, så arealet af løbegården bliver størst muligt.

6.D1.2

Et kaninbur er bygget op ad en mur, således at burets gavl har form som en retvinklet trekant (se figur). I gavlen skal der udskæres en rektangulær åbning som vist på figuren. Rektanglets højde betegnes h, og rektanglets bredde betegnes b. Alle mål er i dm.



a) Bestem højden af buret.

b) Vis, at rektanglets højde udtrykt ved rektanglets bredde er givet ved

$$h = 6 - \tfrac{3}{4}b.$$

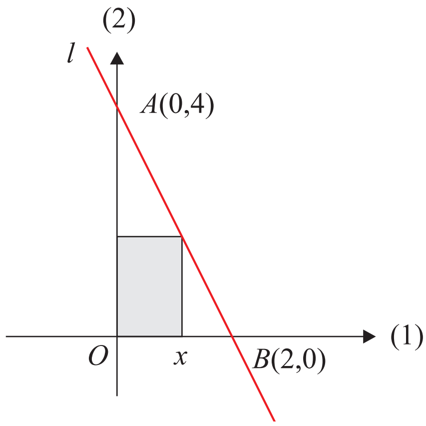
c) Bestem rektanglets areal udtrykt ved b, og bestem b, så rektanglets areal bliver størst muligt.

6.D1.3

På figuren ses en ret linje l gennem punkterne A og B. Desuden er et rektangel indskrevet i trekant OAB som vist på figuren.

a) Bestem arealet af rektanglet som funktion af x.

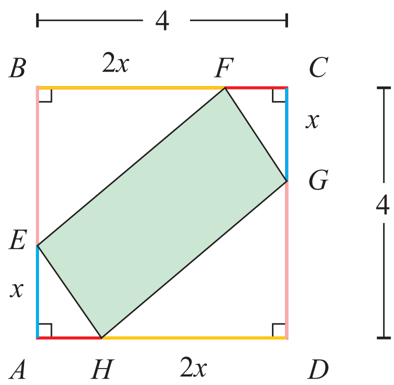
b) Bestem den værdi af x, der gør arealet af rektanglet størst mulig.



Delprøve 2

6.D2.1

Et kvadrat $ABCD$ har sidelængden 4. I kvadratet er der indskrevet et parallelogram $EFGH$, som vist på figuren.



a) Bestem arealet af trekanterne AEH og BEF udtrykt ved x.

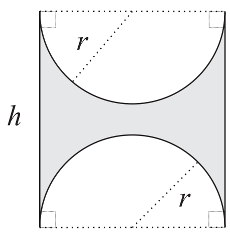
b) Gør rede for, at arealet af parallelogrammet $EFGH$ er givet ved

$$T(x) = 4x^2 - 12x + 16.$$

c) Bestem den værdi af x, der gør arealet af parallelogrammet mindst muligt idet $0 < x < 2$.

6.D2.2

Et stykke metal har form som et rektangel med sidelængderne h og $2r$. To halvcirkler med radius r skæres ud af metalstykket som vist på figuren. Det tilbageværende metalstykke har omkredsen 6.



a) Bestem h udtrykt ved r.

b) Gør rede for, at arealet af det tilbageværende metalstykke som funktion af r kan beskrives ved

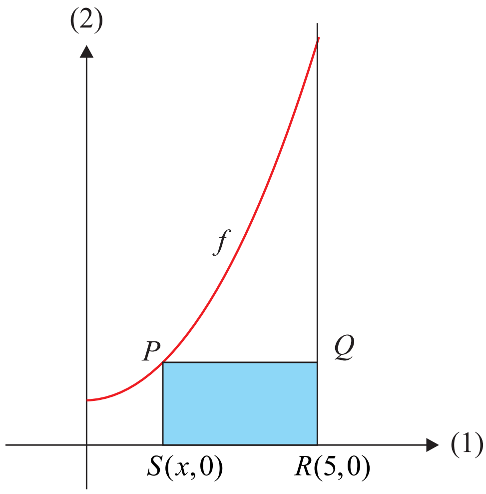
$$A(r) = 6r - 3\pi r^2.$$

c) Bestem r, så metalstykkets areal bliver størst muligt.

6.D2.3 På figuren ses grafen for en funktion f, der er bestemt ved

$$f(x) = x^2 + 3\,,\ x > 0\,.$$

Endvidere ses et rektangel $PQRS$, hvor R og S ligger på førsteaksen. Det oplyses, at punktet P ligger på grafen for f, og at punktet R har koordinaterne $(5,0)$.

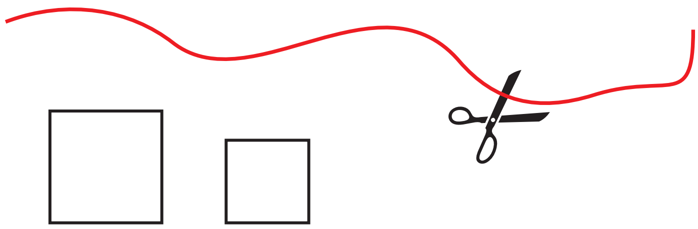


a) Gør rede for, at arealet af rektanglet $PQRS$ udtrykt ved x er givet ved

$$A(x) = -x^3 + 5x^2 - 3x + 15\,.$$

b) Bestem x, så arealet bliver størst muligt, idet $0 < x < 5$.

6.D2.4



En snor på 12 cm klippes i to stykker, og stykkerne bruges til at danne omkredsen af to kvadrater.

a) Bestem det samlede areal af de to kvadrater, når længden af det ene stykke snor er 4 cm.

Snoren klippes nu over $4x$ cm fra den ene ende, hvor $0 < x < 3$.

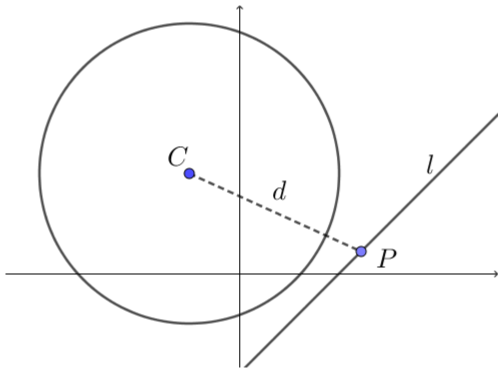
b) Vis, at det samlede areal A af de to kvadrater som funktion af x er givet ved

$$A(x) = 2x^2 - 6x + 9.$$

c) Bestem x, så $A(x)$ er mindst muligt.

6.D2.5 En cirkel er bestemt ved ligningen

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4\,.$$



a) Bestem cirklens radius og koordinatsættet til cirklens centrum *C*.

En linje l er givet ved ligningen

$$y = x - 2\,.$$

Afstanden mellem cirklens centrum *C* og et punkt på linjen *l* betegnes med *d*.

b) Gør rede for, at afstanden *d* mellem cirklens centrum *C* og et punkt *P* på linjen *l* som funktion af *x* er givet ved

$$d(x) = \sqrt{2x^2 - 6x + 17}\,.$$

c) Benyt $d(x)$ til at bestemme koordinatsættet til det punkt på linjen *l*, som har den mindste afstand til cirklens centrum *C*.

6.D2.6 En funktion *f* er bestemt ved

$$f(x) = x^2 + 3.$$

a) Tegn grafen for *f*, og afsæt punktet *Q* (2,4) i samme koordinatsystem.

Det oplyses, at punktet $P(3,12)$ ligger på grafen for *f*.

b) Bestem $|PQ|$.

Lad $R(x, f(x))$ være et vilkårligt punkt på grafen for *f*.

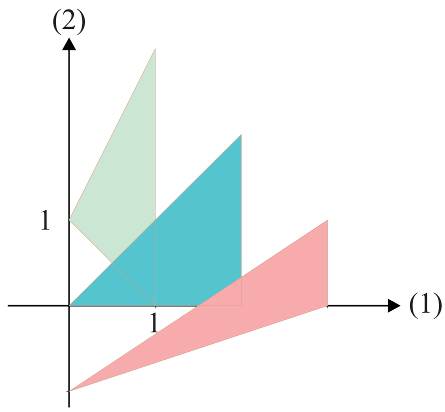
c) Bestem den værdi af *x*, så $|RQ|$ er mindst mulig.

6.D2.7 I et koordinatsystem er tre punkter givet ved $A(x,0)$, $B(x,4-x)$ og $C(0,2-x)$, hvor $0 < x < 4$.

a) Bestem arealet af trekant *ABC*, når $x = 3$.

Figuren viser trekanten *ABC* for tre forskellige værdier af *x*.

b) Bestem *x*, så arealet af trekant *ABC* er størst muligt.



6.D2.8 Linjen l er givet ved ligningen $3x+4y-4=0$, og funktionen f er bestemt ved

$$f(x)=x^2+3.$$

a) Tegn grafen for f og linjen l i samme koordinatsystem.

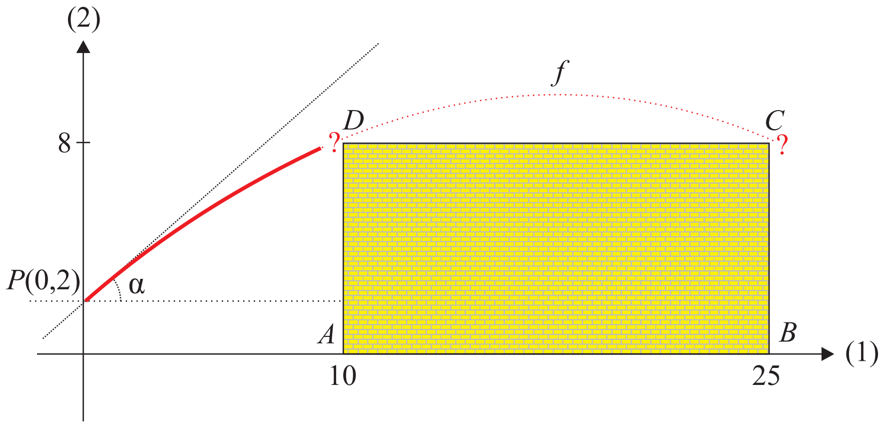
Lad $R(x,f(x))$ være et vilkårligt punkt på grafen for f.

b) Gør rede for, at afstanden $d(x)$ mellem R og l er givet ved

$$d(x)=\frac{4x^2+3x+8}{5}.$$

c) Benyt $d'(x)$ til at bestemme den mindste afstand mellem Q og l.

6.D2.9



En person prøver at kaste en cricketbold over en kasseformet bygning, der er 15 m bred og 8 m høj. I et koordinatsystem med enheden meter på begge akser slipper personens hånd bolden i punktet $P(0,2)$. Den bane, bolden følger, er en del af grafen for funktionen

$$f(x)=-0{,}02388x^2+0{,}8693x+2\,.$$

Tværsnittet af bygningen er rektanglet bestemt af punkterne $A(10,0)$, $B(25,0)$, $C(25,8)$ og $D(10,8)$.

a) Undersøg, om bolden kommer over bygningen.

Den retning, bolden har i starten, er bestemt ved hældningsvinklen α for tangenten til grafen for f i punktet $P(0,2)$.

b) Bestem α.

6.D2.10

Tabellen viser antallet af Twitter-brugere for en række måneder fra 1. januar 2010 til 1. januar 2012.

Antal måneder efter 1. januar 2010	0	3	6	9	12	15	18	21	24
Antal brugere (i mio.)	30	40	49	54	68	85	101	117	138

I en model antages det, at udviklingen i antallet af Twitter-brugere kan beskrives ved

$$f(t) = b \cdot a^{t},$$

hvor $f(t)$ betegner antallet af Twitter-brugere (målt i mio.) til tidspunktet t (målt i måneder efter 1. januar 2010).

a) Benyt tabellens data til at bestemme tallene a og b.

b) Bestem $f'(30)$, og giv en fortolkning af dette tal.

6.D2.12

Foto: www.colourbox.dk

Tabellen nedenfor viser udviklingen i antal sendte SMS'er i perioden 2005-2014 i Danmark.

Antal måneder efter 1. januar 2005	0	6	…	102	108
Antal sendte SMS'er (målt i mio.)	659	745	…	772	737

(Hele tabellen med alle 19 datapunkter findes i bilaget *SMS sendt i Danmark.xlsx*)

Til opgaven hører et bilag

I en model kan udviklingen i det månedlige antal sendte SMS'er i Danmark i perioden 2005-2014 beskrives ved en funktion af typen

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

hvor $f(x)$ betegner antallet af sendte SMS'er (målt i mia.) til tidspunktet x (målt i antal måneder efter 1. januar 2005).

a) Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a, b og c.

b) Benyt $f'(x)$ til at bestemme det år, hvor det årlige antal sendte SMS'er i Danmark var størst.

Kilde: Erhvervsstyrelsen.dk

6.D2.13

Foto: www.colourbox.dk

Tabellen nedenfor viser udviklingen i befolkningstallet på Færøerne i perioden efter 2011.

Årstal	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Befolkning	48447	48204	48062	48153	48617	49121	49812	50485

I en model kan udviklingen i befolkningstallet på Færøerne beskrives ved et andengradspolynomium N, hvor $N(t)$ betegner befolkningstallet på Færøerne til tidspunktet t (målt i antal år efter 2011).

a) Benyt tabellens data til at bestemme en forskrift for funktionen N.

b) Bestem det tidspunkt, hvor befolkningstallet på Færøerne ifølge modellen var mindst.

c) Benyt modellen til at bestemme væksthastigheden for udviklingen i befolkningstallet på Færøerne i år 2015.

Kilde: Hagstova.fo

6.D2.14

Foto: www.colourbox.dk

Tabellen nedenfor viser udviklingen i antal landbrugsbedrifter med malkekøer i perioden $1975-2008$ i Danmark.

År efter 1975	0	5	15	25	32	33
Antal bedrifter	63200	42400	21500	9800	4900	4500

Det antages, at udviklingen i antal landbrugsbedrifter med malkekøer kan beskrives ved en funktion af typen

$$N(t) = b \cdot a^t,$$

hvor $N(t)$ betegner antal landbrugsbedrifter med malkekøer t år efter 1975.

a) Benyt tabellen til at bestemme en forskrift for $N(t)$.

Udviklingen i det samlede antal malkekøer i Danmark kan i samme periode beskrives ved funktionen

$$M(t) = 1106 \cdot 0{,}98^t,$$

hvor $M(t)$ betegner antal malkekøer (i tusinde) t år efter 1975.

b) Bestem forskriften for den funktion $G(t)$, der beskriver udviklingen i det gennemsnitlige antal malkekøer pr. landbrugsbedrift i perioden $1975-2008$.

c) Benyt $G(t)$ til at bestemme den årlige procentvise stigning i det gennemsnitlige antal malkekøer pr. landbrugsbedrift i perioden $1975-2008$.

6.D2.15

Foto: www.colourbox.dk

Når spinat kommes i kogende vand, nedbrydes C-vitaminindholdet i spinaten. En forsker har målt sammenhørende værdier af kogetiden og C-vitaminindholdet i spinat. Forskerens resultater fremgår af tabellen.

Kogetid (minutter)	2,0	3,0	4,0	6,0	8,0	10	15	20	25	30
C-vitaminindhold (mg)	26,5	29,5	20,0	13,5	14	9,0	4,5	3,0	1,5	1,0

I en model kan sammenhængen beskrives ved

$$f(x) = b \cdot a^x,$$

hvor $f(x)$ betegner C-vitaminindholdet (målt i mg) i 100g spinat efter en kogetid på x (målt i minutter).

a) Benyt regression på tabellens data til at bestemme a og b.

Nitratindholdet i spinaten aftager også ved kogningen. I modellen kan forholdet mellem C-vitaminindholdet og nitratindholdet beskrives ved

$$g(x) = \frac{f(x)}{20{,}3 + 61{,}4 \cdot 0{,}884^x}.$$

b) Benyt modellen til at bestemme den tid spinaten skal koge, før forholdet mellem C-vitaminindholdet og nitratindholdet i spinaten er nede på 0,1.

6.D2.16

Foto: www.colourbox.dk

Tabellen viser den gennemsnitlige ventetid på en plejebolig i 2012 fordelt på landets kommuner.

Gennemsnitlig ventetid (målt i dage)	$0-1$	$1-30$	$30-60$	$60-120$
Andel af kommuner (målt i %)	18	58	18	6

a) Bestem de kumulerede frekvenser for fordelingen af den gennemsnitlige ventetid på en plejebolig i 2012.

En funktion f er givet ved

$$f(x)=\begin{cases} 18\cdot x & 0\leq x<1 \\ 2\cdot x+16 & 1\leq x<30 \\ 0{,}6\cdot x+58 & 30\leq x<60 \\ a\cdot x+b & 60\leq x\leq 120 \end{cases}$$

Det oplyses, at sumkurven for fordelingen af den gennemsnitlige ventetid på en plejebolig i 2012 er graf for funktionen f.

b) Bestem a og b.

c) Løs ligningen $f(x)=80$, og forklar betydningen af løsningen.

6.D2.17

En håndboldklub sælger julekalendere, der også er lotterilodder. Bag lågerne i kalenderen er der billeder af juletræer, nisser eller pakker. Hvis der på en kalender er netop 7 eller 8 låger med juletræer, når alle 24 låger er åbnet, så er der gevinst på kalenderen.

Sandsynligheden for, at der er et juletræ bag en låge, benævnes p.

a) Bestem sandsynligheden for, at der er gevinst på en kalender, hvis $p=0{,}2$.

b) Brug differentialregning til at bestemme den værdi af p, der giver den maksimale sandsynlighed for gevinst på en kalender.