# At skrive
# SRP
# i, med og om
# MATEMATIK

***En tekst til gymnasieelever om metoder og basal videnskabsteori i SRP med matematik***

## 2020

**Kasper Bjering Søby Jensen**

*For Fagkonsulenten i Matematik, Børne- og Undervisningsministeriet*

## Om forfatteren til denne tekst

**Kasper Bjering Søby Jensen (f. 1980)**

Cand.scient. i Matematik og Fysik

Ph.d. i matematikkens didaktik.

Lektor ved Roskilde Katedralskole

# Indholdsfortegnelse:

# 1. Indledning

Denne tekst er skrevet til STX-gymnasieelever, der på uddannelses 3. år overvejer eller har besluttet at inddrage faget *matematik* i deres studieretningsprojekt (SRP). Teksten kan endvidere bruges tidligere i uddannelserne, når arbejdet forberedes.

Tekstens formål er at give et sæt af begreber, der kan bruges, når man skal beskrive og diskutere, hvilke relevante faglige metoder fra matematikfaget man har anvendt i besvarelsen af opgave-formuleringen. Teksten er ikke endegyldig og autoritativ. I sidste ende er det alene kvaliteten af de argumenter, man fremfører, i det skriftlige produkt og den efterfølgende mundtlige fremlæggelse, som tæller i bedømmelsen af arbejdet med opgaven.

Teksten giver endvidere en kort omtale af *basal videnskabsteori* i relation til matematikfaget.

Introduktionen til *metoder* og *basal videnskabsteori* peger især frem mod den mundtlige prøve som aflægges efter aflevering af det skriftlige produkt. Ved bedømmelsen af det skriftlige produkt lægges der ikke specielt vægt på refleksion over metoder og basal videnskabsteori, mens der ved den mundtlige prøve optræder følgende bedømmelseskriterium (blandt i alt tre) i SRP-læreplanen:

> »*eksaminandens evne til at foretage metodiske, tværfaglige og basale videnskabsteoretiske overvejelser i forbindelse med projekter og valg af indgående fag, herunder argumentation for eventuelt valg af ét fag*.«

Det er altså i forbindelse med den mundtlige prøve, at tekstens begrebsapparat især vil finde anvendelse. Men forberedelsen til denne sidste del af hele SRP-processen starter allerede ved begyndelsen med, at der træffes et reflekteret valg af *problemstilling* samt de fag, der skal anvendes til at besvare problemstillingen. Teksten her giver gode råd til, hvad matematikfaget kan og ikke kan være med til.

Det centrale i teksten er begrebet *metode*. Begrebet forstås her altid som ”*en konkret handlings-anvisning*”. En metode er altså aldrig en abstrakt og ukonkret ting. Aldrig et luftigt begreb langt fra det arbejde man har lavet. Aldrig en generel sætning der lires af, uden at have konkret betydning i det arbejde man har udført.

En metode er altid knyttet til en konkret handling, som man foretager for at finde ud af noget. Man vælger en metode, fordi man har fornuftige argumenter for, at den vil føre til, at man finder ud af det rigtige. Teksten giver således ikke anvisninger til at opstille ”standardsætninger”, som altid kan bruges. Brugen af begreberne må altid knyttes eksplicit til noget man konkret har gjort.

Teksten er bygget op med seks kapitler efter indledningen. Kapitel 2 vil således give en overordnet introduktion til matematikfagets rolle i SRP-arbejdet, herunder hvilke overvejelser, der bør indgå når matematik vælges som fag. Kapitlet præsenterer tre måder hvor på matematik kan optræde. Man kan arbejde *i matematik*, *med matematik* og/eller *om matematik*.

Kapitel 3 præsenterer otte begreber, som kan bruges til at beskrive de metoder, der anvendes, når der arbejdes *i matematik*. Kapitel 4 præsenterer fem begreber, der kan bruges, når der arbejdes *med matematik*. Og endeligt præsenterer kapitel 5 nogle begreber og metodiske overvejelser, knyttet til det at arbejde *om matematik*.

I kapitel 6 præsenteres nogle vigtige begrebspar i forhold til at indplacere arbejdet med matematik i den konstruktion, der kaldes, *basal videnskabsteori*.

Endeligt vil kapitel 7 give nogle råd til hvordan læreplanens krav om "metodiske og basale videnskabsteoretiske overvejelser" kan indtænkes i den mundtlige prøve.

God fornøjelse med SRP-arbejdet – med eller uden matematik som fag.

Kasper Bjering Søby Jensen,
Ishøj, april 2020

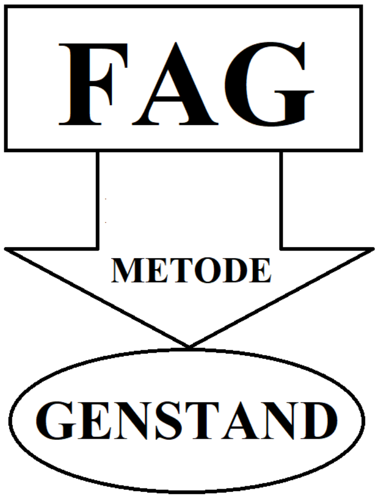
Der udsendes samtidig med denne tekst en mere kortfattet oversigt over begreberne i teksten. Oversigten kan findes på hjemmesiden https://emu.dk/stx/matematik/fra-fagkonsulenten

*Den her foreliggende tekst baserer sig på teksten "Metoder og videnskabsteori i, med og om matematik" udarbejdet til gymnasielærere sammen med Jens Christian Larsen, som jeg takker for samarbejdet om at udvikle begrebsapparatet, som her præsenteres med gymnasieelever som målgruppe.*

*Den oprindelige tekst kan hentes her:*
https://emu.dk/stx/matematik/fra-fagkonsulenten

# 2. Om at vælge matematik i SRP

### 2.1 Fag, genstand, metode og viden




I gymnasiet organiserer vi stort set alt arbejde og al viden omkring fagene i fagrækken. I SRP skal man almindeligvis udføre arbejde der involverer to fag på én gang. Det kan derfor være godt at overveje hvad der udgør den principielle forskel på fagene i fagrækken.

Et lidt forsimplet, men her brugbart, bud på dette, er fagenes *genstandsfelter*. Et genstandsfelt er det særlige udsnit af verden, som faget er blevet skabt for at studere. I biologi studeres således ”det levende og samspillet mellem det levende og det omgivende miljø”, i samfundsfag studeres ”danske og internationale samfundsforhold” og i dansk studeres ”dansk sprog og litteratur”.

Hvis ens SRP-problemstilling omhandler en genstand, der hører til et af disse tre genstandsfelter, vil det være oplagt at have biologi, samfundsfag eller dansk med i sin SRP.

Fagene adskiller sig imidlertid ikke kun ved det de studerer, men også på måderne de arbejder. Inden for hvert fag har der over tid udviklet sig en række *metoder* til at studere netop dette fags genstandsfelt. Metoderne er naturligvis forskellige, afhængigt af om vi studerer ”det levende”, ”samfundsforhold” eller ”litteratur”.

Ofte kan en SRP-problemstilling have et fokus, hvor et bestemt fags metode vil gøre god gavn i undersøgelsen af en genstand, som måske hører mere til et andet fags genstandsfelt. Så kan dét være en god grund til at have metode-faget med i sin SRP.

Når et fag har anvendt sine metoder på en problemstilling inden for sit genstandsfelt, har det produceret *viden*. Ud fra sin viden skaber faget en *teori* om sit genstandsfelt. Fagene har altså over tid udviklet en værktøjskasse af redskaber kaldet *metoder*, samt en stor pulje af særlig *viden* og *teori* om fagets genstande.

En SRP-problemstilling kan således omhandle en genstand, der hører til et bestemt fag, men for at kunne forstå denne genstand, kan det være nødvendigt at hente *viden* og *teori* ind fra et andet fag. Det kan være et godt argument for, at dette andet fag også skal indgå i ens SRP.

Hvis man skal vælge matematik, skal man altså overveje om det er genstandsfeltet, metoderne eller viden og teori fra faget, der er brug for, for at kunne besvare problemstillingen.

## 2.2 Matematikkens genstandsfelt

Matematikere er meget uenige om hvad matematikkens genstandsfelt præcist er. Nogle mener at faget slet ikke har et genstandsfelt, men at matematik mere kan sammenlignes med et sprog. De der mener, at matematik har et genstandsfelt, er uenige om hvor vidt genstandene er *opfundet* eller *opdaget* af mennesker. Uenighederne gælder imidlertid kun det mere filosofiske spørgsmål om genstandsfeltet, ikke om hvordan man arbejder med matematiske spørgsmål.

Her vil der blive opridset nogle karakteristika ved *matematiske genstande*, som vi altså beslutter os for eksisterer under en eller anden form:

1. Matematiske genstande findes på den ene side i vores individuelle subjektive bevidsthed når vi undersøger dem, men har på den anden side fælles objektive egenskaber.

2. Matematiske genstande er abstrakte og ikke-fysiske. Vi kan altså ikke studere matematiske genstande med sanserne, sådan som vi kan med eksempelvis naturvidenskabelige genstande.

3. Matematiske genstande rummer et enormt potentiale til anvendelse uden for matematikken, f.eks. i de andre fag.

Et eksempel på en matematisk genstand kunne være *cirklen*. Der findes ikke cirkler i den fysiske verden, men der findes mange ting der med god mening kan beskrives som værende cirkelformede. Men cirklen som sådan findes kun i vores tankeverden. Til gengæld er der ingen diskussioner om formlerne for dens omkreds og areal, herunder værdien af tallet $\pi$. Cirkler har altså samme egenskaber, uanset hvilket menneskes tanker de optræder i.

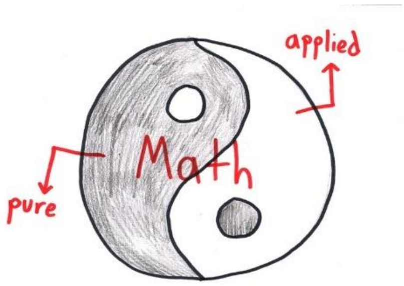
Et andet eksempel på matematiske genstande er *tallene*. Der findes ikke tal i den fysiske verden. Der findes fysiske objekter, som mennesker kan beskrive ”antallet af” ved at benytte tal. Der findes fænomener, som kan beskrives med brøker eller negative tal. Men tallene som sådan findes kun i vores tanker. Alligevel er der ingen diskussion om deres egenskaber – disse er fælles for alle.

De to eksempler passer med den typiske første tilnærmelse til en beskrivelse af matematikkens genstandsfelt: *Tal* og *form*. Men fra gymnasiet kender vi også til f.eks. *funktioner*.

I perioden fra 1935 og en række årtier frem forsøgte en fransk matematikergrupper kaldet Bourbaki (gruppen findes stadig) at beskrive alt matematik ved hjælp af såkaldte *mængder*. En matematisk genstand var i denne forstand en *mængde* med en *struktur*. I mangel på bedre kan man – uden at gå dybere ned i emnet her – vælge at sige, at matematikkens genstandsfelt er *strukturerede mængder*. Med denne tilgang bliver den matematiske disciplin *mængdelære* særligt vigtig.

## 2.3 Matematikkens tilgange

Når vi udvikler matematiske metoder til at studere matematiske genstande, er disse nødt til at være tilpasset de ovenfor nævnte karakteristiske egenskaber. Vi skal bruge metoder, som gør os i stand til at studere abstrakte objekter, der har ophold i vores tanker mens de studeres. Metoder som gør at forskellige mennesker er sikre på, at de studerer de samme genstande.



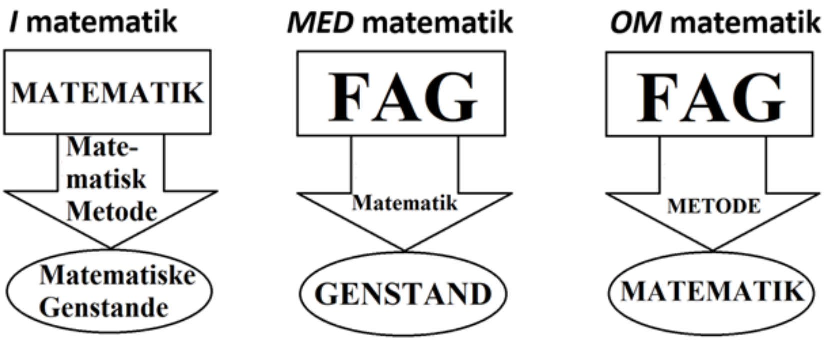

Samtidig bemærkes at punkt 3 ovenfor er særligt vigtig. Faget matematik ville ikke have opnået sin udbredelse, hvis ikke det var for fagets enorme potentiale til at beskrive fænomener inden for andre fag og vidensområder. At bringe matematik i anvendelse er en særlig side af faget.

Matematik er altså et fag med to uadskillelige sider. En *ren* side, hvor vi studerer matematikkens egne genstande og teori, med matematikkens egne metoder. Og en *anvendt* side, hvor vi anvender matematikken, som en metode til at beskrive og undersøge genstande inden for andre fags genstandsfelter. Endeligt er matematik et fag, der ofte studeres i sig selv. Det kaldes *meta*-siden.

Disse tre tilgange vil her blive beskrevet som tre forskellige roller matematikfaget kan spille i SRP. Den *rene* tilgang, hvor matematik som *fag* undersøger egne genstande med egne metoder, vil blive kaldt at arbejde *i matematik*. Den anvendte tilgang, hvor matematik bruges som *metode* af et andet fag til at studere dette fags genstande, vil blive kaldt at arbejde *med matematik*. Og meta-tilgangen hvor matematik gøres til genstand for et andet fags metoder, blive kaldt at arbejde *om matematik.*

Når man skal besvare en konkret problemstilling, skal man altså skabe sig en eller flere metoder, som gør det muligt at besvare problemstillingen. I kapitel 3, 4 og 5 vil forskellige komponenter i matematiske metoder blive forklaret. Det centrale at forstå er, at det altid er den faglige tilgang, dvs. den rolle matematikken spiller, som styrer valget af metode. Metoden er altså underordnet den faglige tilgang og den rolle som matematikken spiller.

De tre roller eller tilgange kan beskrives med figuren til højre. Bemærk at faget "matematik" står tre forskellige steder. Dels som det fag der "ejer" genstands-feltet, dels som metode for et andet fag og dels som genstand for at andet fag. Det er disse tre roller vi gerne vil kunne skelne.



**2.4 Skal man vælge matematik i sin SRP?**

En SRP styres af den *problemstilling* man ønsker at arbejde med. Det er således i princippet også *problemstillingen*, der styrer hvilke af ens fag man med fordel bør inddrage i arbejdet. Man skal altså ud fra problemstillingen overveje hvilke faglige metoder, hvilken faglig viden og hvilke faglige teorier, som bedst kan bidrage til at besvare problemstillingen.

For at vælge matematik som fag, skal man altså sikre sig at faget kan spille en eller flere af de tre roller nævnt ovenfor. Til den mundtlige prøve (se kapitel 7), skal man kunne redegøre for det fornuftig i dette valg. Det er altså nødvendigt tidligt i processen at have en idé om dette.

Det er her vigtigt at understrege at matematikfaget ofte vil spille to af rollerne eller alle tre roller. Indgår matematik på A-niveau, vil der endvidere være krav om, at faget i en del af opgaven må arbejde *i matematik*, også selvom problemstillingen mest lægger op til de to andre roller.

En faldgrube kan være, at man på forhånd har besluttet, at matematik bare skal indgå. Måske har man tænkt at skrive om problemstillingen ”Hvornår er en planet beboelig” i valgfaget *astronomi*. Hvorvidt matematik kan indgå her vil afhænge af, om man kan finde en passende måde at arbejde *med matematik* som metode til at hjælpe astronomi.

Det kan måske være at man vil opstille en matematisk model, som beskriver beboelighed som funktion af en række indgående parametre. Det kan imidlertid blive et alvorligt problem for opgaven, hvis det viser sig at man ikke kan opstille en sådan model. Matematik har alene som fag meget lidt at sige om planeters beboelighed. Er man ikke sikker på at kunne opstille en sådan model, må matematik fravælges. I stedet kan der måske findes relevante kombinationer med andre fag, f.eks. *biologi*, *fysik*, *geovidenskab* eller *bioteknologi*.

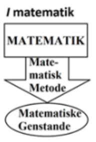
Den ideelle SRP-proces bygger på, at man først og fremmest lægger sig fast på en problemstilling, hvortil man vælger de to mest oplagte fag. Man bør naturligvis kun vælge matematik til at besvare problemstillinger, som matematik faktisk kan bidrage til at svare på.

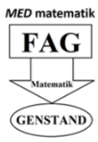
I mindre ideelle SRP-processer kan man være fristet til at starte med at vælge et eller to fag, som man gerne vil have en opgaveformuleringen stillet i. Hvis matematik skal være et af fagene, så skal man naturligvis vælge en problemstilling der passer dertil. Hvis man vil inddrage et samfunds- eller naturvidenskabeligt fag, bør man vælge en problemstilling, hvor man på forhånd ved at der er en brugbar matematisk model at arbejde med. Hvis man vil inddrage historie eller dansk, bør man på forhånd sikre sig, at der er relevant matematik at undersøge. Og er man drevet af interesse for et bestemt matematisk emne, må man finde et andet fag, som kan bidrage relevant og med noget, som matematik ikke selv kan.

## 2.5 Eksempler på problemstillinger som matematik kan bidrage til

Betingelsen for at kunne vælge matematik i SRP er, at man enten har matematik på A-niveau som en del af sin studieretning eller at man kombinerer matematik med et studieretningsfag på A-niveau. Man kan også kombinere matematik A som valgfag med et studieretningsfag på B- eller C-niveau. Endeligt kan matematik på A-niveau (studieretningsfag såvel som valgfag) bruges til enkeltfaglig besvarelse. Se mere om dette i afsnit 2.6.

I det følgende vil der blive givet en række eksempler på hvordan de forskellige tilgange/roller konkret kan se ud. Der er ikke tale om eksempler på metoder. I alle eksemplerne vil der skulle ske tilpasning i dialog med din faglærer og/eller vejleder, før opgaven konkret vil kunne skrives.

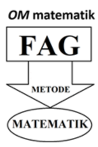


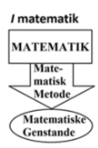



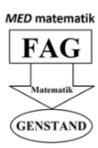

**Eksempel 1:** *Hvordan beskrives bevægelse i tre dimensioner?*

Problemstillingens vægt på *beskrivelse* synes oplagt at appellere til *matematik A*. Teorien om vektorfunktioner kan udvides til tre dimensioner og parameterkurver i rummet kan være modeller af bevægelse i rummet. Der skal altså her arbejdes *med matematik* for at beskrive bevægelsen, men også *i matematik*, for at kunne forstå den teori, som skal anvendes i beskrivelsen.

Problemstillingens andet fag kunne oplagt være *fysik*, idet der her kan arbejdes med teorier, der begrunder bevægelsen, og eksperimenter der understøtter beskrivelsen. Men det kunne også være *informatik*, hvor der arbejdes med at programmere bevægelser i tre dimensioner. Og måske *billedkunst* kunne arbejde med, hvordan man beskriver en tre-dimensionel bevægelse på et billede eller i en serie af billeder. Måske et litterært fag kunne diskutere, hvordan man sprogligt beskriver en sådan bevægelse. Matematik kan altså arbejde sammen med flere fag om problemstillingen.



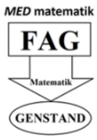



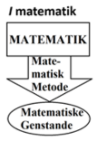




**Eksempel 2:** *Hvordan startede den videnskabelige revolution?*

Problemstillingen synes oplagt at appellere til faget *historie*, da spørgsmålet er af historiefaglig art. Som andet fag synes *matematik A* eller *fysik A/B* oplagte. Begge fag kan bidrage med viden og teorier som opstod i forbindelse med den videnskabelige revolution.

Vælges *matematik*, vil man overordnet set skulle arbejde *om matematik*. Med historiefaglige metoder skal det undersøges enten hvilken rolle matematik spillede for den videnskabelige revolution, og/eller hvordan matematikken udviklede sig i forbindelse med samme. I den forbindelse vil der formentlig være brug for at arbejde *i matematik*, for at forstå relevante dele af den aktuelle matematiske teori, og muligvis også at arbejde *med matematik*, for at forstå og give eksempler på hvordan den udviklede matematik konkret kunne anvendes til videnskabelige formål.

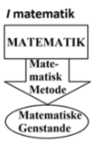





**Eksempel 3:** *Hvor interesserede er danske unge i politik?*

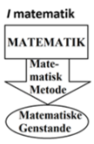
Problemstillingen synes oplagt at appellere til faget *samfundsfag*, da spørgsmålet omhandler et samfundsmæssigt forhold. Det kan derudover kombineres med *historie*, hvis man vil se på den historiske udvikling, med *dansk* hvis man vil undersøge spørgsmålet med metoder til analyse af artikler og litterære tekster, med *psykologi* hvis man vil interessere sig for individets motiver for at engagere sig, og sikkert mange andre faglige vinkler.

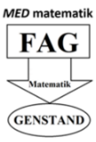
Også *matematik* kan bidrage, hvis man vil anvende *kvantitative metoder* inden for samfundsfag. Matematik kan bidrage med statistiske metoder som f.eks. regression og statistiske test, hvor der kan fyldes et såkaldt $\chi^2$-test (chi-i-anden-test) oven på kernestoffet. For matematik A vil der være brug for at arbejde *i matematik* med teorien for regression eller test, mens det for matematik B vil være mere oplagt at arbejde *med matematik* i anvendelsen af statistikken, til at analysere og konkludere på f.eks. en spørgeskemaundersøgelse.




**Eksempel 4:** *Hvordan formidles fraktaler til interesserede unge?*

Problemstillingen involverer oplagt *matematik*, da fraktaler er en særlig geometrisk figur, som det vil kræve et dybdegående arbejde *i matematik* at få hold på. Derudover skal der arbejdes *om matematik*, hvor et andet fags metoder til formidling anvendes på et matematikfagligt emne. Det vil typisk være faget *dansk*, men kunne måske også være *mediefag*, *billedkunst* eller *informatik*.






**Eksempel 5:** *Hvordan kan man designe vekselspændingskredsløb?*

Problemstillingen involverer oplagt faget *fysik*, da vekselspændingskredsløb er en genstand fra dette fags genstandsfelt. Der er såvel teori fra el-læren, som mulighed for forsøg med konkrete designs. Faget kan måske kombineres med fag som *musik* (hvis eksemplet er en højttaler), med *arkitektur og design* (i forhold til kredsløbets faktiske udformning) eller *informatik* (hvis programmering indgår).

Problemstillingen kan også besvares med *matematik*, som er et velegnet værktøj til at beskrive vekselspændingskredsløb. Her vil der typisk skulle arbejdes *i matematik* for at afdække den matematiske teoribygning omkring komplekse tal, og *med matematik* for at vise hvordan vekselspændingskredsløb kan modelleres effektivt med komplekse tal.

### 2.6 Hvornår kan matematik skrives enkeltfagligt

Hvis man har et ønske om at skrive SRP i ét fag, skal problemstillingen godkendes af vejleder. Godkendelsen skal ifølge SRP-læreplanen tage højde for »*den faglige problemstillings egnethed som henholdsvis fler- og enkeltfagligt projekt samt elevens mulighed for at inddrage metodiske og videnskabsteoretiske overvejelser i projektet*.«

SRP-læreplanen beskriver endvidere en række faglige mål, som opgaven skal opfylde. I forhold til metoder og det at skrive enkeltfagligt, er de vigtigste mål, at man som elev skal kunne:

- planlægge og gennemføre en undersøgelse af en problemstilling med anvendelse af viden, kundskaber og metoder fra indgående fag

- udvælge, anvende og kombinere forskellige faglige tilgange og metoder

- demonstrere faglig indsigt og fordybelse ved at beherske relevante faglige mål i indgående fag og ved at sætte sig ind i relevante nye faglige områder

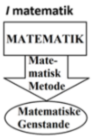
For de to første mål bemærkes at ordet "metoder" er skrevet i *flertal* og, at det samme i andet punkt gælder for "faglige tilgange". Det er altså nødvendigt, at man kan argumentere for, at der i det enkeltfaglige projekt indgår flere forskellige *faglige tilgange* og *metoder*. Dette krav er næsten automatisk opfyldt med to fag, mens det kræver særlig omtanke at opfylde det med ét.

Samtidig skal man fra det tredje punkt bemærke, at man skal vise, at man behersker faglige mål og, at man kan sætte sig ind i nye faglige områder. Hvis opgaven er to-faglig bliver disse krav delt ud på to fag. I en enkeltfaglig opgave mister man denne to-faglige kompleksitet, men skal til gengæld demonstrere en tilsvarende større faglig dybde i det ene fag.

Ønsker man at skrive enkeltfaglig SRP i matematik, skal man altså sikre sig, at der i besvarelsen indgår mindst "to metoder" og "to faglige tilgange". De følgende tre kapitler i denne tekst giver ideer til, hvad man kan forstå ved "metoder i matematik", og dermed en idé om, hvad man kan medtage, for at opfylde et sådan krav.

Samtidig skal man forvente, at der stilles væsentligt større matematik-faglige krav i besvarelsen. Det siger sig selv, at man på 20 siders matematik forventes at levere et matematikfagligt set mere kompliceret indhold, end hvis de 20 sider skal deles med et andet fag. Man bør altså være ret sikker på, at man kan honorere høje faglige krav i faget matematik, før man vælger at skrive enkeltfagligt.

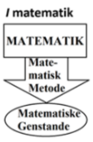
De følgende eksempler på problemstillinger, er velegnede til en matematisk enkeltfaglig besvarelse. Til hver af dem følger en kort diskussion af hvorfor de netop egner sig til det.

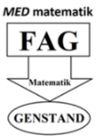



**Eksempel 6:** *Hvilken geometrisk betydning har udvidelsen af reelle tal til komplekse tal?*

Problemstillingen er oplagt en invitation til *matematik*, da de indgående genstande er matematiske. Problemstillingen dækker flere faglige tilgange. Dels indgår en *algebraisk* tilgang med at udvide de reelle tal til de komplekse tal, herunder arbejde med notation, definition, sætninger og beviser. Dels en *geometrisk* tilgang, hvor den geometriske betydning af f.eks. multiplikation med reelle hhv. komplekse tal undersøges, med anvendelse af ræsonnement og problemløsning. Begge faglige tilgange har karakter af at være arbejde *i matematik*. Ønsker man en særlig hård udfordring, kan problemstillingen omhandle talområdet *kvarternioner*, som er en videreudvidelse af komplekse tal.

Da der i første omgang er tale om en ren undersøgelse af et matematisk objekt, er det oplagt et arbejde der må udføres enkeltfagligt. Men samarbejde med andre fag vil nok også være muligt.

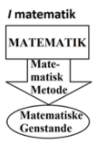



**Eksempel 7:** *Hvordan virker en GPS?*

Problemstillingen appellerer til matematikfaget, fordi en GPS i høj grad er et stykke anvendt matematik. Dels vil der være brug for at arbejde *i matematik* for at opstille relevant teori om geometri på overfladen af en kugle. Dels vil der være brug for at arbejde *med matematik*, for at opstille en konkret model af jordens geografi. Et projekt der spænder over to roller vil stort set automatisk rumme flere faglige tilgange og metoder.

Problemstillingen er som udgangspunkt enkeltfaglig, fordi den alene forholder sig til den matematiske side af en GPS' funktion. Men samarbejde med andre fag som *fysik* eller *naturgeografi*/*geovidenskab* vil også kunne laves.





**Eksempel 8:** *Opdagede Caspar Wessel en geometrisk fortolkning af de komplekse tal?*

Problemstillingen må oplagt trække på matematik, fordi det kræver et arbejde *i matematik* at forstå, hvad "komplekse tal" er for en størrelse samt, hvad der menes med "geometrisk fortolkning". Problemstillingen kræver også et arbejde *om matematik*, fordi et udsnit af matematikken skal undersøges med historie-briller, f.eks. ved at analysere den norsk-danske matematiker Caspar Wessels afhandling "Om Directionens analytiske Betegning" fra 1799, som en historisk kilde. Afhandlingen udlægges ofte som en "geometrisk fortolkning af de komplekse tal", og problemstillingen ville kræve en undersøgelse af, om dette er en rimelig udlægning. Opgaven vil ikke nødvendigvis være oplagt at inddrage faget *historie* i, fordi den ikke lægger op til en indplacering i en bredere historisk sammenhæng. Derfor kan problemstillingen besvares enkeltfagligt.

# 3. Metoder til arbejde *i matematik*

Når der arbejdes *i matematik* kræves der metoder, som kan bruges til at tilgå og undersøge matematiske genstande. Da disse er abstrakte og ikke-fysiske, kan vi ikke bruge de forskellige metoder som kendes fra natur- og samfundsvidenskaberne. Vi kan ikke lave et eksperiment i et laboratorium, vi kan ikke lave feltobservationer, og vi kan ikke lave spørgeskemaer eller interviews.

Vi har altså brug for metoder, der kan gøre et abstrakt tanke-objekt så konkret, at vi kan håndtere en undersøgelse af det. Og som sikrer at to forskellige mennesker kommer til samme resultat, hvis de på korrekt vis undersøger samme objekt. Vi skal altså have et sprog til at kommunikere med hinanden om matematiske objekter. Her er matematikkens *notation* og *begreber* særligt vigtige.

Dernæst har vi brug for en måde at opbygge matematisk teori på, så den viden der indsamles kan gemmes til senere brug, både for en selv og for andre. Her er begrebet *sætning* centralt.

Vi har også brug for metoder til at finde svar på spørgsmål om matematiske objekter, samt at kunne godtgøre at vores teori er korrekt. Her vil vi tale generelt om metoder som *problemløsning*, *ræsonnement*, *bevis* og *eksperiment*.

Endeligt vil vi her tale om *eksemplet* som en matematiske metode til på selvstændig vis at anskueliggøre abstrakte pointe. F.eks. indholdet i en matematisk sætning.

På de følgende sider karakteriseres otte forskellige begreber, som kan bruges til at beskrive metoder til at arbejde *i matematik* i en SRP:

1. Notation
2. Begrebsafklaring
3. Teorifremstilling
4. Problemløsning
5. Ræsonnement
6. Bevis
7. Eksperiment
8. Eksempel

## 3.1 Notation

Det matematiske symbolsprog er kendt fra den daglige undervisning. Symbolerne for tallene, f.eks. de naturlige tal ”1,2,3, ...”, de hele tal ”$\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$”, rationale tal som $\frac{2}{5}$ og $-\frac{6}{21}$ og visse særligt pæne irrationale tal som $\pi$ og $\sqrt{3}$, er kendte. Det samme gælder symboler der knytter sig til regning, f.eks. $a + b$, $a \cdot b$ og $a^b$. Disse symboler er nødvendige, for at vi kan udforske tallene og deres egenskaber,

Også symboler for vektorer, $\vec{a}$ og $\overrightarrow{AB}$, samt symboler for regning med vektorer, eksempelvis $\vec{a} + \vec{b}$, $5 \cdot \vec{a}$ og $\det(\vec{a}, \vec{b})$, kendes. Også disse symboler er nødvendige for, at vi kan udforske vektorerne og de geometriske objekter, som de kan anvendes til at beskrive.

I geometrien har vi også symboler for punkter, f.eks. $A$, $B$, $C$ og for linjestykker, f.eks. $AB$, $BC$, og $AC$. Trekanten med $A$, $B$ og $C$ som hjørner, kan skrives $\triangle ABC$, og ofte kalder vi sidernes længder for $a$, $b$ og $c$, som forkortelse for udtrykkene $|BC|$, $|AC|$ og $|AB|$. Ofte kalder vi rette linjer ved symboler som $l$ og $m$, mens cirkler af og til navngives med et symbol som $\mathcal{C}$.

Omkring funktioner indføres symboler som $f$, $g$ og $h$, samt $f(x)$ og $f(5)$. Også symbolerne $f'(x)$ og $\frac{d}{dx} f(x)$ indføres, og for funktioner af to variable symbolet $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$. Symbolet $\int f(x)\,dx$ indføres for en familie af funktioner, mens symbolet $\int_a^b f(x) dx$ indføres for et bestemt tal.

Indførelsen af det matematiske symbolsprog, er det metodiske greb vi foretager, for at gøre de matematiske objekter synlige. I teorien kunne meget matematik godt undersøges uden, men det ville være meget svært. Prøv f.eks. at formulere løsning af en andengradsligning uden brug af symboler.

Symbolsproget gør det samtidig muligt for os at tale sammen om matematik på tværs af alle grænser. Så selvom symbolsproget principielt kan vælges frit, så er tilegnelsen af det fælles standardsymbolsprog en vigtig del af det at lære matematik, og dermed af at skrive SRP med matematik.

I en SRP vil der ofte som del af metoden være brug for, at man indfører en notation som er ny for en selv og særligt knyttet til det emne der arbejdes med. Eksempler kunne være følgende:

I mængdelæren kan det være symboler som ”$\emptyset$”, ”$x \in A$”, ”$A \cup B$”, ”$A \subset B$”, ”$A \times B$” og ”$\wp(A)$”.
I formel logik kan det være symboler som ”$A$”, ”$\neg A$”, ”$A \wedge B$”, ”$A \Rightarrow B$” og ”$A \Leftrightarrow B$”.
I arbejde med uendelighed kan det være symboler som ”$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$” og ”$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$”.
Inden for talteori kan det være symboler som ”$A$ MOD $B$”, ”$sfd(a, b)$”, ”$[X]_n$”, ”$|$” og ”$\nmid$”.
I arbejde med dobbeltintegraler må man kunne arbejde med symbolet ”$\int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$”.

### 3.2 Begrebsafklaring

De matematiske symboler siger i sig selv ikke noget, om de objekter vi gerne vil bruge dem til at beskrive. Vi er nødt til også at indføre matematiske begreber, som præcist afgrænser de matematiske objekter vi gerne vil undersøge, samt de egenskaber de eventuelt måtte besidde.

Ofte har man en række klare forestillinger om, hvad et bestemt objekt er. Tænk f.eks. på en *cirkel*. De fleste mennesker kan med meget stor præcision afgøre, om en given figur er en *cirkel* eller en *ikke-cirkel*. Men prøv at overveje hvad en cirkel egentlig er? Hvordan forklarer man det?

Samme spørgsmål kunne stilles om en anden plangeometrisk figur, *parablen*. Den kendes fra grafen for andengradspolynomiet. Men grafen for $f(x) = x^4$ ligner også en parabel, men er det ikke. Hvad gør egentlig en figur til en parabel? Parablen og cirklen er begge eksempler på en mere generel familie af figurer, der kaldes for *keglesnit*. Hvad kendetegner mon dem? Og er der flere end de to?

Begrebet *funktion* fylder ganske meget i gymnasiets matematikundervisning. Men hvad er egentlig en funktion? Det lader sig kun afklare om noget er eller *ikke* er en funktion, ved at have en præcis definition af begrebet. Overvej f.eks. hvorfor en liste over eleverne i en gymnasieklasse samt deres fraværsprocent er en funktion, mens udtrykket $y^2 = 1 - x^2$ ikke er det.

Et fjerde eksempel er begrebet *sandsynlighed*, som for de fleste har en oplagt hverdagsbetydning, som kan forklares med ord som *chance* eller *risiko*. Men reelt er dette blot to ord for det samme som sandsynlighed. Og da et begreb ikke kan forklares ved at bruge begrebet, må en mere præcis forklaring til. Hvis et eksperiment udføres $n$ gange og frekvensen af udfaldet $x$ er $f(x)$, da vil vi sige at sandsynligheden $p(x)$ for $x$ per definition er: $p(x) = \lim_{n \to \infty} f(x)$.

Pointen er, at man ikke kan begynde at opnå sikker viden om cirkler, parabler, funktioner og sandsynligheder, før det er blevet præcist afklaret hvad der karakteriserer disse objekter. Vi kalder en sådan afklaring for en *definition*.

Også de egenskaber et objekt kan have, afklares ved en *definition*. Eksempelvis kan det afklares ved en definition, hvad der menes med, at en funktion er *kontinuert*, *voksende* eller *differentiabel*.

I en SRP er det metodisk nødvendigt at lave meget præcise afklaringer af de objekter der undersøges, de egenskaber der beskrives, og i forlængelse heraf den tilhørende notation.

I en SRP om fraktaler er det f.eks. nødvendigt at definere hvad en *fraktal* er og hvad der forstås ved begrebet *dimension*. I en SRP om uendelige rækker, må begreber som *talfølge* og *række* defineres præcist, før deres egenskaber kan undersøges. I en SRP om lineær algebra, vil en præcis definition af begreber som *matrix* og *vektor*, samt tilknyttede regneregler, være centralt.

### 3.3 Teorifremstilling

En stor del af de resultater der opnås inden for matematikfaget, har form af *sætninger*. En sætning er almindeligvis et udsagn med en generel betydning for mange varianter af en bestemt type objekt. Det mest berømte eksempel på en sætning er *Pythagoras sætning*, som udtrykker en sammenhæng mellem siderne i enhver retvinklet trekant. Sætningen gælder altså generelt.

Men der gælder mange andre sætninger om retvinklede trekanter. F.eks. en sætning om bestemmelse af dens areal, om dens vinkelsum og en sætning om relationerne mellem trekantens sider og vinkler (involverende *sinus*, *cosinus* og *tangens*). Alle disse sætninger udgør til sammen en matematisk teori om retvinklede trekanter.

Denne matematiske teori kan bruges til at udvikle andre matematiske teoribygninger. F.eks. kan teorien om *vilkårlige trekanter* (kaldet trigonometrien) udledes fra teorien om retvinklede trekanter. Dele af teorien om vektorer trækker på teorien om retvinklede trekanter. Dele af funktionsanalysen (f.eks. længden af en kurve), bygger på teorien om retvinklede trekanter.

På tilsvarende vis findes en teori om integration af funktioner (integralregning). Denne teori består af en lang række sætninger, som gør det muligt at integrere funktioner. Men teorien finder også anvendelse i sandsynlighedsregningen, når en række resultater om kontinuerte fordelinger (f.eks. normalfordelingen) skal udledes.

Når der arbejdes *i matematik*, er der ofte brug for at sammenfatte en række relevante elementer af en teori i én samlet fremstilling (som også indeholder definitioner og introduktion af symbolsk notation), så teorien kan bringes i anvendelse ved svar på det spørgsmål der skal undersøges.

At lave en brugbar fremstilling af nødvendig teori er en del af den metode der anvendes, når der arbejdes matematisk, fordi studier af matematiske objekter netop ikke har andet grundlag, end teorien selv. Alle ”nye” studier baserer sig på gamle studier.

Fremstillingen af teori fordrer almindeligvis, at et antal definitioner og sætninger præsenteres. Ofte indføres disse med en nummerering, som konstrueres til den konkrete brug i opgaven. Det gør det muligt i en senere argumentation for løsning af konkrete opgaver eller udledning af ”ny” teori at referere til tidligere fremstillet teori ved at henvise til ”definition X” og ”sætning Y”.

En del matematisk teori betjener sig af andre ord for mindre centrale sætninger, f.eks. ”hjælpe-sætning”, ”lemma”, ”korollar” og ”proposition”. Ordet ”teorem” anvendes også nogle gange.

Naturligvis er teori i en SRP sjældent ægte ”nyt”, men udledninger af kendt teori. En særlig vigtig opgave her er at forsøge at fremstille teorien på sin egen måde, i sit eget sprog – ikke ved ”plagiat”.

### 3.4 Problemløsning

En af matematikkens store styrker, er den mangfoldighed af problemer, som kan løses i faget. Her er tale om konkrete problemer, med et specifikt svar – og ikke f.eks. beviser for teoretiske sætninger, som leverer mere generelle svar.

Klassiske problemer som løses *i matematik*, kan være løsning af ligninger og differentialligninger, undersøgelse af funktioner (f.eks. ved differentiation og integration), bestemmelse af egenskaber ved geometriske figurer, besvarelse af sandsynlighedsteoretiske problemer, spektakulære problemer inden for tallenes verden osv.

Når der skal løses konkrete problemer, som en del af metoden i en SRP, kan der skelnes mellem tre principielle problemløsningsmetoder:

| | |
|---|---|
| *Analytisk metode:* | Når problemet analyseres ved hjælp at matematiske ræsonnementer. Det kan f.eks. være at en ligning løses ved lovlige omskrivninger og en funktion differentieres ved hjælp at regneregler for differentiation. |
| *Numerisk metode:* | Når problemet løses, ofte tilnærmet, ved hjælp af konkrete beregninger. Det kan være en ligning der løses ved ”at prøve sig frem” eller en differentialligning der løses ”skridt for skridt”. Det kan også være ved at finde en omtrentlig væksthastighed som linjehældning gennem to konkrete datapunkter eller integration ved et tilnærmet areal. En numerisk metode kan være opfundet til lejligheden, men der findes også en række numeriske ”standardmetoder”. |
| *Grafisk metode:* | Når problemet anskueliggøres ved hjælp af grafiske fremstillinger. Det kan f.eks. være grafer for funktioner eller skitser af figurer. En ligning kan f.eks. løses tilnærmet ved at tegne eller skitsere graferne for udtrykkene på hver side af lighedstegnet og finde skæringspunkter. Og en væksthastighed kan bestemmes tilnærmet, ved at indtegne en omtrentlig tangent til en tegnet eller skitseret graf. |

I langt de fleste SRP’er med matematik, vil *problemløsning* være en central del af metoden. Det gælder både for en SRP skrevet i ”ren matematik” og en SRP med ”anvendt matematik”. Det vil i den slags situationer være særdeles klogt at kunne skelne mellem eksempelvis de tre ovennævnte problemløsningsmetoder.

Listen med tre typer metode til problemløsning er ikke nødvendigvis udtømmende. Støder man på en problemløsningstype, der ikke dækkes af de tre ovennævnte, tager man den naturligvis med.

### 3.5 Ræsonnement

Det matematiske ræsonnement er en central del af de fleste matematiske metoder. Det typiske matematiske ræsonnement er bygget over såkaldt *implikation*: ”Hvis A, så B”. Eksempelvis:

> **Hvis** $f'$ er positiv for alle $x \in I$, **så** er $f$ voksende i $I$.
> **Hvis** $\angle C$ i $\triangle ABC$ er ret, **så** er $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$
> **Hvis** hændelsen H består af $m$ ud af $n$ lige sandsynlige udfald, **så** er $p(H) = \frac{m}{n}$.

Det følger af reglerne for ræsonnementer, at alene fordi ”Hvis A, så B”, så kan vi ikke slutte at ”Hvis B, så A”. F.eks. er udsagnet ”Hvis $f$ er voksende i $I$, så er $f'$ positiv for alle $x \in I$” ikke sandt. Der kan eksistere et eller flere $x \in I$, således at $f'(x) = 0$. Og sandsynligheden for en hændelse H kan sagtens være $p(H) = \frac{m}{n}$, uden at hændelsen består af $m$ ud af $n$ lige sandsynlige udfald.

Det er til gengæld sandt, at hvis der i $\triangle$ABC gælder $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$, så er $\angle C$ ret. I et sådan tilfælde, hvor der både gælder ”Hvis A, så B” og ”Hvis B, så A”, der taler vi om *biimplikation*. Ofte vil vi da sige, at der gælder: ”A hvis, og kun hvis, B” eller ”A netop hvis B”.

I ræsonnementer udnytter vi også, at et matematisk udtryk A kan *negeres*. Det vil sige, at der findes et modsat udtryk vi kalder ikke-A. Et af logikkens mest fundamentale principper er, at der altid gælder enten A eller ikke-A. Aldrig begge dele og aldrig ingen af dem. Heraf følger også, at det modsatte af ikke-A, dvs ikke-ikke-A, er A.

Af dette princip kan vi udlede princippet om *kontraposition*. Hvis der gælder ”Hvis A, så B”, så må der også gælder ”Hvis ikke-B, så ikke-A”. Hvis B nødvendigvis gælder, når A gælder, så må det at B ikke gælder, nødvendigvis gøre at A heller ikke gælder. Et eksempel:

> **Hvis** $f$ er differentiabel, **så** er *f* kontinuert.

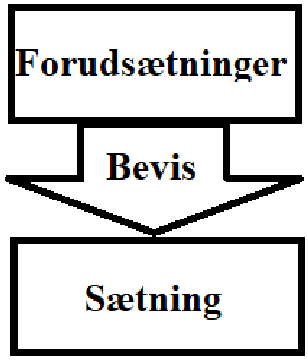
Dette er et korrekt og sandt udsagn. Af dette følger nødvendigvis at også følgende er sandt:

> **Hvis** $f$ ikke er kontinuert, **så** er $f$ ikke differentiabel.

Kan man vise at der gælder ”Hvis ikke-B, så ikke-A”, har man altså vist at der også gælder ”Hvis ikke-ikke-A, så ikke-ikke-B”, der er det samme som ”Hvis A, så B”. Man kan altså argumentere entydigt for ”Hvis A, så B”, ved at vise at ”Hvis ikke-B, så ikke-A”.

Ræsonnementer indgår som en nærmest uundværlig del af enhver matematisk metode. Det er derfor meget vigtigt, at man er i stand til at eksplicitere hvornår man bruger dem, og hvilken type slutning de baserer sig på.

### 3.6 Beviset




Den matematiske teori er, som omtalt i afsnit 3.3, opbygget af sætninger. Den helt centrale metode i matematikken til at godtgøre, at en sætning er sand, er det matematiske *bevis*. Et bevis er en formel logisk udledning af, at en given *sætning* er sand, fordi en række udsagn der går *forud* for *sætningen* – kaldet *forudsætninger* – er sande. Beviset er i den forstand et meget stringent og formelt ræsonnement (eller kæde af ræsonnementer).

Forudsætningerne for en sætning er ofte af fire forskellige slags:

*Sætninger*, som allerede er blevet bevist.
*Definitioner*, som klarlægger en præcis betydning af indgående begreber.
*Aksiomer*, som er en slags ”sætninger”, der er så simple, at det er besluttet at de er sande.
*Antagelser*, som er udsagn, der antages at gælde i den konkrete situation.

I den matematiske litteratur skelnes ofte mellem en række forskellige typer af beviser:

*Direkte bevis:* Fra udgangspunktet $A_1$ vises $A_2$, som fører til $A_3$, som fører til $A_4$, osv. frem til at $A_{n-1}$ fører til $A_n$. Af denne kæde af implikationer følger: Hvis $A_1$, så $A_n$.

*Kontraposition:* Princippet er omtalt i afsnit 3.5 og går kort sagt ud på, at hvis man kan vise at ”Hvis ikke-B, så ikke-A”, så har man også vist at der gælder ”Hvis A, så B”.

*Modstrid:* Hvis man vil vise A, kan man antage at der gælder ikke-A og så vise at dette fører frem til at der både gælder B og ikke-B. Da der aldrig kan gælde både B og ikke-B, kan der således ikke gælde ikke-A, og dermed må der gælde A.

*Induktion:* Hvis man kan vise, at hvis et udsagn gælder for tallet $n$, så gælder det også for tallet $n+1$, samt vise at det gælder for $n=1$, så har man vist at udsagnet gælder for alle $n \geq 1$. For hvis det gælder for $n=1$, gælder det også for $n=1+1=2$. Men hvis det gælder for $n=2$, gælder det også for $n=2+1=3$, osv.

*Modeksempel:* Hvis det påstås, at for alle $x$ gælder en egenskab $P(x)$, så er det nok at vise at der findes ét $x$, hvorom der gælder ikke-$P(x)$, for at have bevist at påstanden ikke gælder. F.eks. kan påstanden om, at for alle reelle tal $x$, gælder at $x^2 > 0$, bevises falsk ved at opstille modeksemplet $x=0$ om hvilket der gælder $x^2 = 0 \ngtr 0$.

Beviser er centrale i de fleste SRP’er med matematik. En udfordring er altid at gøre et bevis ”til sit eget”. Men ét aspekt af dette kan være, at man kan diskutere det ud fra ovenstående begreber.

### 3.7 Eksperiment

Eksperimentet er som metode velkendt i naturvidenskaberne, mens det i mindre grad kendes i matematikken. Men i matematik kan man sagtens udføre eksperimenter, og opnå omtrent samme erkendelse ved det, som i et naturvidenskabeligt fag.

Et eksperiment er en styret undersøgelse, hvor der i en given situation indgår en eller flere ukendte størrelser (ofte kaldet *parametre*). Ved at gentage situationen et passende stort antal gange, hvor alene én af parametrene varieres fra gang til gang, kan der opnås nogle formodninger om og indsigter i, hvilken betydning den pågældende parameter har i situationen.

Det er vigtigt at forstå, at et eksperiment principielt set næsten aldrig giver os sikker viden om matematikken (udover som modeksempel, der beviser en påstands ukorrekthed). Et eksperiment er en undersøgelse af et endeligt antal tilfælde, og vi kan ikke alene ud fra eksperimentet vide, om konklusionen vil holde i alle de andre (typisk uendeligt mange) tilfælde.

Det betyder ikke at eksperimenter er ubrugelige. I naturvidenskaberne har eksperimentet samme rækkevidde. Nok så mange bestemmelser af tyngdeaccelerationens størrelse kan give os en klar forventning om, at den også i næste eksperiment er det samme. Men aldrig principielt sikker viden. Det afholder ikke naturvidenskab fra eksperimenter, og bør heller ikke afholde matematik fra det.

Et klassisk eksempel på en påstand, der aldrig er bevist eller modbevist, er *Goldbachs formodning*. I 1742 fremsatte matematikeren Christian Goldbach en formodning om, at ethvert lige tal større end 2, altid vil kunne skrives som en sum af to primtal. Formodningen er aldrig blevet bevist analytisk, men computer-eksperimenter har vist, at det gælder for alle lige tal op til 4 trillioner. Om det også gælder for alle andre er ubevist – eksperimentet viser alene at det gælder for disse tal. At eksperimentet ikke giver endelig viden, har ikke afholdt professionelle matematikere fra at lave det.

Fra undervisningen kendes typisk eksperimenter med ”skydere” i et graf-værktøj, hvor f.eks. en parameter i forskriften for et andengradspolynomium varieres, for at få et indtryk af hvilken betydning parameteren har for udseendet af funktionens graf. En således indhøstet formodning kan ofte senere gøres til genstand for et formelt bevis.

Fra undervisningen kendes også til simuleringer af sandsynlighedsfænomener, f.eks. test af en nulhypotese. Også her sluttes der noget om forventningen til nulhypotesen, ved at kigge på et endeligt antal udførelser af et eksperiment. Sikker viden giver det ikke, men en formodning opnås.

I en SRP er det naturligvis helt legitimt at inddrage eksperimenter, som en del af sin matematiske metode. Der vil naturligvis være en forventning om, at man er i stand til at diskutere rækkevidden af de konklusioner, der kan drages ud fra en sådan metode.

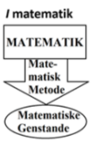
## 3.7 Eksempel

I SRP er det ofte en udfordring at skulle gengive et bevis, et ræsonnement, løsningen af et problem eller præsentationen af et begreb eller symbolnotation, så det fremstår som ens eget arbejde. Problemet opstår, fordi man ofte henter sin viden i en eller flere kilder, hvor det hele mere eller mindre er præsenteret, men ikke bare må gengive andres arbejde (hvilket er plagiat).

En løsning på dette er naturligvis, at man forsøger at gøre indholdet til sit eget, ved at skrive det i sit eget sprog. Det er i denne sammenhæng helt centralt, at man sørger for at lave en fælles notation gennem hele opgaven, selvom forskellige kilder måtte bruge forskellig notation.

En anden ”metode” er at udarbejde et eller flere gode eksempler på en definition, en symbolbrug, anvendelse af en sætning, løsning af problem mv. Her skal man *ikke* kopiere eksempler fra de kilder man benytter, men selvstændigt opstille eksempler. Det kan godt hævdes ikke at være en rigtig ”metode” til arbejde *i matematik*, men i SRP-brug er det relevant at tænke på det at ”opstille et godt eksempel”, som en del af arbejdet med det matematiske stof og for at vise selvstændighed.

En særlig slags eksempel, er det *patologiske eksempel*, som er et ”vildt” eksempel på at noget der virker indlysende, ikke nødvendigvis gælder. F.eks. forekommer det oplagt, at en funktion der alle steder er kontinuert, også må være differentiabel nogle steder. Men matematikeren Weierstrass har opstillet sin såkaldte ”monsterfunktion”, som er alle steder kontinuert, men ingen steder differentiabel. Dette er et eksempel på et *patologisk eksempel* i matematik.



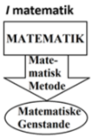

## 3.8 Eksempler på metode *i matematik* i SRP

**Eksempel 9:** *Firfarveproblemet*

I matematik eksisterer det såkaldte *firfarveproblem*, som populært sagt går ud på at bevise, at ethvert landkort kan farvelægges med højest 4 forskellige farver (så intet territorium grænsende op til hinanden behøver at have samme farve).

I en SRP om dette problem vil der metodisk være behov for en præcis definition af ”et landkort”, fremstille elementer af såkaldt ”grafteori”, indføre et helt særligt symbolsprog knyttet til denne teoribygning samt en række problemløsningsteknikker knyttet til *diskret* (endelig) matematik.

½Det særlige ved firfarveproblemet er, at det kræver en så omfattende regnekraft at udføre beviset, at det ikke har ladet sig gøre før opfindelsen af computeren. Det kalder på relevante metodiske overvejelser om rækkevidden og accepten af en meget særlig type bevis.

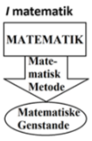



**Eksempel 10:** *Det gyldne snit*

I en SRP om det såkaldte *gyldne snit*, vil der metodisk være et behov for at afklare indholdet i begrebet, samt de begreber fra simpel geometri der går forud. Der er behov for *analytisk problemløsning*, for at løse den andengradsligning, der kan opstilles ud fra definitionen, til bestemmelse af det *tal* ($\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$), som vi kender som ”det gyldne forhold”.

I et forsøg på at arbejde videre med betydningen af dette tal, kan en fremstilling af notation, begreber og teori knyttet til de såkaldte Fibonacci-tal være oplagt. I relation til dette emne er der mulighed for at udbygge sin metode med såvel problemløsning, som ræsonnementer af forskellig art.

I relation til Fibonnacital og tallet $\Phi$, kan man eksempelvis støde ind i Binets formel, som gør det muligt at beregne Fibonacci-tal nummer $n$. Beviset for denne formel trækker på en række forskellige bevistyper, bl.a. kan der indgå en sætning som forudsætning, hvor der kræves et *induktionsbevis*. Det giver således anledning til en række metodiske overvejelser om beviser.




**Eksempel 11:** *Lineær algebra*

I en SRP om *lineær algebra*, vil der være et indledende metodisk behov for at afklare de særlige objekter, der knytter sig til området (vektorrum, underrum, matricer, mv.), samt den særlige notation der hører til. Der vil endvidere være behov for at fremstille den tilhørende teori, som bl.a. beskriver regler for regning med vektorer og matricer. Det vil være muligt, som en del af metoden at udføre en række ræsonnementer og mindre beviser for sætninger.

I forlængelse af indledende metodiske redegørelser for begreber, notation og teori, er det også muligt at bruge den lineære algebra til at udvikle en række problemløsningsmetoder inden for andre felter. Det gælder f.eks. løsning af lineære ligningssystemer og i forlængelse af dette, løsning af systemer af koblede lineære differentialligninger.

De mange regneregler, små sætninger og muligheden for at udlede problemløsningsmetoder, gør det oplagt at udvikle en række gode eksempler selv.

# 4. Metoder til arbejde *med matematik*

Når der arbejdes med at anvende matematik som metode, det vil sige som redskab inden for andre fag, så taler vi her om at arbejde *med matematik*. Matematikkens anvendelighed i andre fag er helt afgørende for, at matematik har en så central rolle i skolesystemer over hele verden.

Når matematik bringes i anvendelse i et andet fag, sker det med brug af *matematiske modeller*. En matematisk model er et matematisk objekt, ofte en funktion eller en geometrisk figur, der med god tilnærmelse kan siges at repræsentere et udsnit af den ikke-matematiske virkelighed.

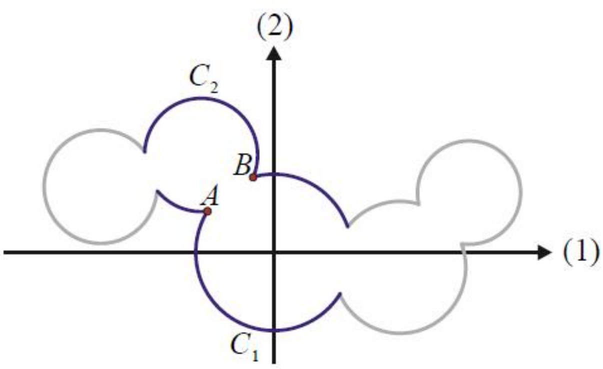
Et eksempel på en matematisk model kan være funktionen $N(t)$ givet ved

$$N(t) = \frac{2{,}2}{1 + 1{,}09 \cdot 0{,}9636^t} \ ,$$

hvor $N(t)$ angiver befolkningstallet i Kina, målt i milliarder mennesker, og $t$ angiver tiden målt i antal år efter 1985. Funktionen er en såkaldt logistisk vækstfunktion og påstanden er, at den beskrevne sammenhæng mellem variablene $t$ og $N$, med god tilnærmelse kan beskrive sammenhængen mellem *tiden* og *befolkningstallet i Kina*.

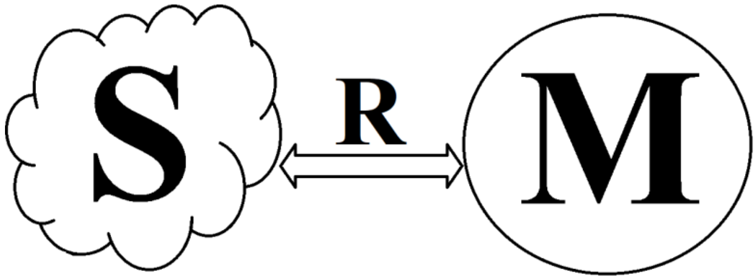
Der er tale om en model. Det betyder at funktionen er en afspejling af virkeligheden – den *er ikke* virkeligheden. Det faktiske indbyggertal i Kina kan naturligvis ikke beskrives endegyldigt ved denne funktion. Men funktionen afspejler vigtige sider af Kinas indbyggertal. F.eks. hvordan udviklingen er forløbet og forventes at forløbe, og hvor stort befolkningstallet omtrent er på et bestemt tidspunkt.

I et andet eksempel kan den såkaldte *cirkelbro* i København (billedet t.v.) modelleres med fem udsnit af cirkler placeret i et koordinatsystem (figuren t.h.). Også her må vi sige, at modellen *ikke* er virkeligheden, men et forsøg på at afspejle virkeligheden. Modellen kan imidlertid godt hjælpe med at give brugbare svar på spørgsmål om cirkelbroen.



I en SRP hvor matematik anvendes i et andet fag, til at beskrive genstande fra dette andet fag, vil der være et særligt fokus på denne anvendelse. Det drejer sig både om sammenhængen mellem modellen og det objekt den søger at beskrive, samt om den rent matematiske undersøgelse af modellen. Det sidste vil ofte have karakter af, at der arbejdes *i matematik*.

En matematisk model er altså en forbindelse mellem et udsnit af virkeligheden og ”noget matematik”. Udsnittet af virkeligheden kaldes for modellens *kontekst*. Hvis vi kalder virkelighedsudsnittet for $S$, matematikken for $M$ og forbindelsen mellem de to for $R$, så kan en matematisk model beskrives i følgende figur. Figuren viser at virkeligheden har en kompleks og svært beskrivelig form, mens matematikken er ”pæn og glat”. Modellen kobler konkrete ”ting” i virkelighedsudsnittet med konkrete dele af den udvalgte matematik.




Når den anvendte metode skal beskrives, er der brug for begreber til at beskrive hvordan der arbejdes mellem virkelighed og matematik. I det følgende beskrives fem komponenter i en metode, hvor der anvendes matematik som metode i andre fag.

- *Modelanvendelse.* Det at anvende en konkret model – uanset hvor man har denne model fra – til at besvare spørgsmål om ikke-matematiske forhold beskrevet af modellen.

- *Modellering.* Den samlede proces med at opbygge en matematisk model, så den kan anvendes til at besvare spørgsmål om ikke-matematiske forhold. Herunder grundige overvejelser om grundlaget for modellen.

- *Modelanalyse.* Det at undersøge grundlaget for en foreliggende model hentet i en kilde. Herunder de grundlæggende antagelser som modellen baserer sig på.

- *Modelvurdering.* Det at vurdere om en foreliggende model giver egnede og realistiske svar på de spørgsmål, man stiller til den.

- *Modelkritik.* En grundlæggende vurdering af hvilke hensyn og interesser, som kan ligge til grund for den måde en foreliggende model er skruet sammen på.

### 4.1 Modelanvendelse

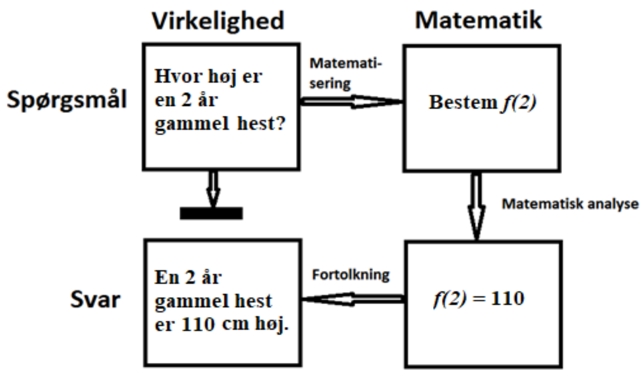
Når en matematisk model anvendes til at besvare spørgsmål inden for et andet fag, taler vi metodisk om *modelanvendelse*. En modelanvendelse forholder sig ikke til hvor modellen kommer fra. Det kan altså både være en man selv har opstillet, og en der er hentet andet steds, f.eks. i litteraturen.

En modelanvendelse handler grundlæggende om, at et spørgsmål fra ”den virkelige verden” ønskes besvaret. Den gennemløber almindeligvis tre delprocesser, som det kan være fornuftigt at omtale i forklaringen af en modelanvendelse:

- *Matematisering*: Når ”spørgsmålet fra den virkelige verden” oversættes til et ”matematisk spørgsmål” inden for modellens rammer, så taler vi om at det virkelige spørgsmål bliver *matematiseret*. Man oversætter altså et ”virkeligt spørgsmål” til et ”matematisk spørgsmål”.

- *Matematisk analyse*: Når der findes et ”matematisk svar” på det ”matematiske spørgsmål”, tales om en *matematisk analyse*. Her arbejdes som udgangspunkt *i matematik*, uafhængigt af konteksten. I den matematiske analyse arbejdes altså rent med matematik.

- *Fortolkning*. Det opnåede ”matematiske svar” skal til sidst oversættes tilbage til den virkelige kontekst. Det kaldes en *fortolkning*.




Et eksempel på ”et virkeligt spørgsmål”, kan være ”hvor høj er en 2 år gammel hest?”. Det spørgsmål kan ikke besvares blot ved at tænke sig meget grundigt om, så der er brug for hjælp.

Hvis man et sted fra har en model i form af en funktion, som beskriver en sammenhæng mellem hestens alder $x$ (målt i år) og hestens højde $f(x)$ (målt i cm), kan man spørge denne model.

Virkelighedsspørgsmålet *matematiseres* ved, at oplysningen ”2 år gammel hest” oversættes til det matematiske udsagn $x = 2$ og spørgsmålet ”hvor høj er en 2 år gammel hest” oversættes til matematikspørgsmålet “bestem $f(2)$”.

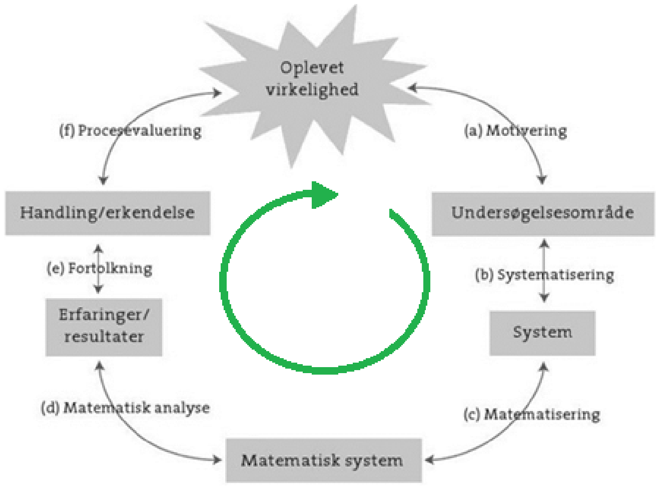
Herefter udføres en matematisk analyse, hvor der opnås et matematisk svar. F.eks. $f(2) = 110$.

Dette svar skal fortolkes tilbage i virkeligheden. Da $f(x)$ er højden af en $x$ år gammel hest, målt i centimeter, så angiver $f(2) = 100$, at en 2 år gammel hest ifølge modellen har højden 110 cm. Via modellen finder man altså virkelighedssvaret: ”En 2 år gammel hest er 110 cm høj.”

### 4.2 Modellering

Den proces hvor der skabes en model, som skal bruges til at beskrive et udsnit af virkeligheden, kaldes *modellering*.

Processen beskrives ofte som en cirkulær proces, som det kan være nødvendigt at gennemløbe flere gange, før modellen er færdig. Processen beskrives her med seks delprocesser, som vist på figuren til højre.




a) *Motivering:* Den *oplevede virkelighed* er uendeligt komplekst og kan aldrig beskrives fuldstændigt. Modelleringen starter med at udvælge et velafgrænset udsnit af virkeligheden, som her kaldes *undersøgelsesområdet*. Det kan f.eks. være at man fra ”2. verdenskrig” samlet set, ønsker at undersøge udfaldet ét bestemt slag.

b) *Systematisering:* Fra undersøgelsesområdet udvælges et *system* med nogle få vigtige egenskaber, som ønskes beskrevet. Det kan f.eks. være at man ønsker at fokusere på antallet af tanks på hver side af slaget, herunder hvor effektive tanksene på hver side er.

c) *Matematisering:* Det valgte system oversættes nu til et *matematisk system*. Det kunne f.eks. være et system af koblede differentialligninger, som hver især beskriver hvordan antallet af tanks på hver side udvikler sig (f.eks. med en såkaldt *Lanchester-model*).

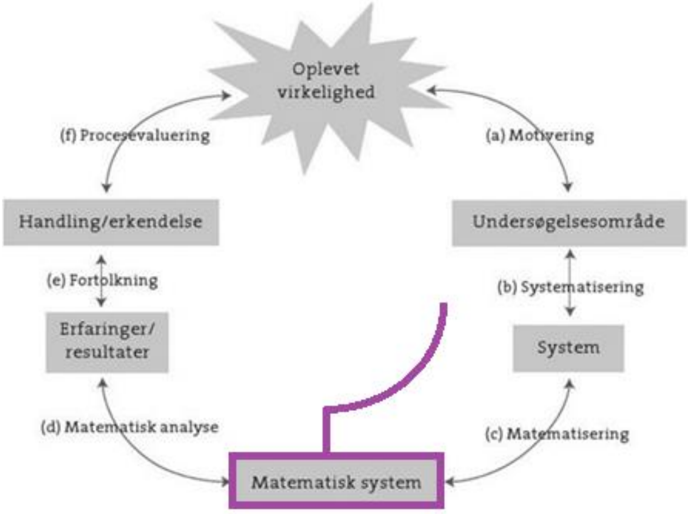
d) *Matematisk analyse:* Med matematiske metoder kan det matematiske system nu undersøges for forskellige egenskaber. Det kan f.eks. være at man finder løsninger til systemet af differentialligninger, samt undersøger egenskaber ved disse løsninger.

e) *Fortolkning:* De opnåede resultater og erfaringer oversættes nu tilbage til den kontekst modellen beskriver, hvor det kan give anledning til handling eller erkendelse. Det kan være udvikling i antallet af tanks med tiden, samt hvilken side, der først mister alle tanks.

f) *Procesevaluering:* De indhøstede erkendelser eller handlinger afprøves op imod virkeligheden. Holder resultaterne? Her kan man f.eks. være at sammenligne med faktuelle data for hvordan det pågældende slag faktisk forløb.

Hvis ikke modellen er tilfredsstillende, gennemløbes processen igen med tilpasninger. I praksis følger man sjældent processerne i samme rækkefølge hele tiden. Men de enkelte delprocesser repræsenterer vigtige sider af modelleringsarbejdet, som er relevante og interessante at tale om.

## 4.3 Modelanalyse




I den situation, at man ikke selv opstiller modellen der anvendes, men i stedet anvender en model man har fået fra eksempelvis litteraturen, så kan det være nødvendigt at finde ud af hvordan modellen er sat sammen, i forhold til den kontekst den beskriver. Det kaldes en *modelanalyse*.

Udgangspunktet for en modelanalyse er, at man allerede har en matematisk model – altså et matematisk system. Modelleringsprocessen starter øverst i modelleringscirklen, mens modelanalysen starter nederst, hvor man så forsøger at bevæge sig baglæns, så det bagvedliggende *system* kan kortlægges, herunder hvordan *undersøgelsesområdet* er udvalgt.

Man kan f.eks. arbejde med følgende differentialligning, som skal er en model, der beskriver den tidslige udvikling i en population af såkaldte *Spruce Budworm*-larver:

$$\frac{dB}{dt} = r_B \cdot B \cdot \left(1 - \frac{B}{K_B}\right) - \beta \cdot \frac{B^2}{\alpha^2 + B^2}$$

Højresidens første led kan genkendes som en logistisk vækstfunktion, så populationens størrelse $B$ vokser logistisk, med $K_B$ som bærekapacitet og $r_B$ som vækstrate for $B$ meget mindre end $K_B$.

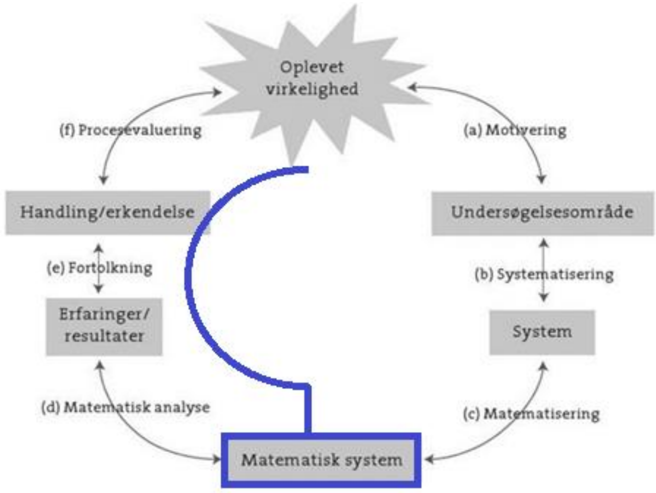
Det andet led er mindre genkendeligt. Det kan ses at for passende små værdier af $B$ bliver leddet omtrent $\frac{\beta}{\alpha^2} \cdot B^2$ og for meget store værdier, omtrent $\beta$. Men hvad siger leddet noget om? Det viser sig at være et prædationsled (en såkaldt ”Holling Type III model”), som beskriver omkringlevende fugles appetit på larverne. Og derfor optræder det som et negativt bidrag til væksthastigheden for $B$.

Selve analysen af modellen vil ofte kunne laves med hjælp fra den litteratur, hvor modellen er hentet. I en SRP vil den komme til udtryk ved en grundlæggende forklaring af hvad de indgående komponenter i modellen repræsenterer og hvilke antagelser de baserer sig på.

Det er vigtigt i en modelanalyse, at man ikke bare beskriver hvad størrelserne repræsenterer, men også hvilke antagelser fra undersøgelsesområdet de afspejler. I ovenstående eksempel vokser fuglenes appetit på larverne altså kvadratisk med størrelsen af populationen. Jo flere larver der er at spise, jo større appetit får fuglene for dem. Det er naturligvis en antagelse om undersøgelsesområdet, som det er meget vigtigt at få analyseret sig frem til.

### 4.4 Modelvurdering

Hvis man skal anvende en model hentet fra litteraturen til at besvare et spørgsmål, kan det være fornuftigt at lave en vurdering af om modellen rent faktisk lever op til formålet. En sådan vurdering minder om de sidste tre faser af modelleringsprocessen. Udgangspunktet er et givet matematisk system, som analyseres, fortolkes og evalueres i forhold til den oplevede virkelighed.




Resultatet af en modelvurdering kan enten være at den valgte model accepteres til formålet, at den helt må forkastes (og en anden vælges) eller at man på egen hånd må justere modellen ved at gennemløbe modelleringsprocessen med afsæt i den udvalgte model, som herefter justeres.

Et eksempel kan være en SRP hvor man i arbejdet med modeller for fremtidige menneskeskabte globale temperaturstigninger anvender en logistisk model for den samlede udvikling i verdens befolkningstal. En sådan model kunne være følgende funktion, hvor $f(x)$ er verdens samlede befolkningstal målt i millioner til tidspunktet $x$, målt i antal år efter 1950.

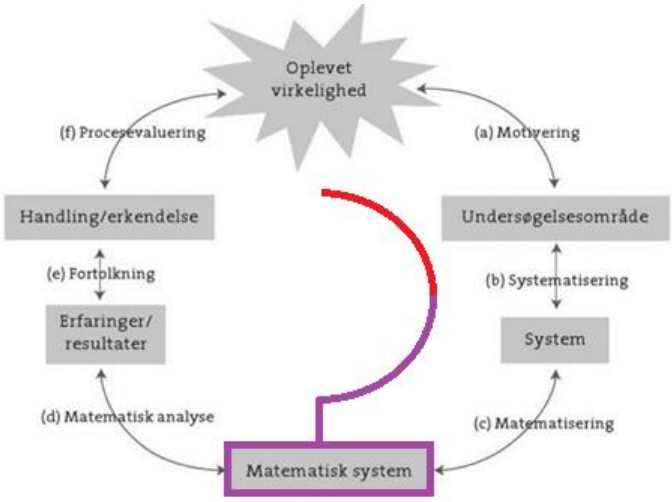
$$f(x) = \frac{12246}{1 + 3{,}95 \cdot \mathbf{e}^{-0{,}0273x}}$$

En vurdering af modellen viser, at den med god tilnærmelse følger FN’s befolkningsmodel for hele verden frem mod år 2100. Det viser sig imidlertid, at alle mennesker ikke har samme bidrag til temperaturstigningen. Det kan f.eks. være at et menneske i Europa har en større eller mindre påvirkning end et menneske fra Afrika. Det viser sig imidlertid, at befolkningsudviklingen i de enkelte verdensdele ikke er den samme.

I en justering af modellen kunne man forestille sig at der opstilledes en række delmodeller: $f_{eu}(x)$, $f_{as}(x)$, $f_{am}(x)$, $f_{af}(x)$ og $f_{au}(x)$ repræsenterende hver af de fem beboede verdensdele og som for hvert $x$ opfylder at $f(x) = f_{eu}(x) + f_{as}(x) + f_{am}(x) + f_{af}(x) + f_{au}(x)$. En samlet model vil således kunne skelne mellem forskellige gennemsnitspåvirkninger fra de forskellige verdensdele.

Det er ofte vigtigt at en ”lånt” model undergår en eller anden form for vurdering, som kan begrunde dens anvendelighed. Om et resultat der antyder modellens manglende tilstrækkelighed fører til justeringer i modellen eller blot passende forbehold for dens anvendelse kan variere.

## 4.5 Modelkritik




I forlængelse af en modelanalyse, hvor modellens komponenter og de antagelser de baserer sig på kortlægges, kan det være oplagt at grave et spadestik dybere og overveje hvilken motivering der kan ligge til grund for modellen. Formålet med dette kan være at afklare om de antagelser, der er foretaget, har deres oprindelse i et ønske om at modellen skal levere bestemte konklusioner eller vægte bestemte forhold mere end andre.

En sådan kortlægning kaldes en *modelkritik*. Det er vigtigt at kunne skelne mellem en *vurdering*, der handler om hvor vidt en model kan levere svar, på de spørgsmål man stiller til den, og en *kritik*, der handler om det grundlag modellen hviler på. De to ting kan naturligvis godt kombineres, men fokus er på to forskellige ting.

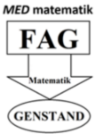
En skelnen som kan være brugbar i en modelkritik, er om en model er *deskriptiv* eller *præskriptiv*. En *deskriptiv model* har til formål at *beskrive* verden, som den er. Den er altså et forsøg på at lave en objektiv beskrivelse af hvordan noget faktisk ser ud og kan forventes at opføre sig. En præskriptiv model har til formål at *foreskrive*, hvordan verden skal være.

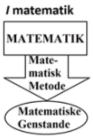
I ethvert taxameter er indbygget en *præskriptiv model*, som foreskriver hvordan en taxatur skal prisfastsættes. Groft sagt bygger den på et input bestående af *tid* og *afstand*, som oversættes til at output i form af en pris. Hvis en taxakunde i stedet ud fra data fra taxature forsøger at bygge sig en model, der kan udregne hvad en tur vil koste, vil modellen være *deskriptiv*, fordi den forsøger at beskrive virkeligheden som den er.

I en modelkritik vil en skelnen mellem de to modeltyper ofte kunne bruges, til at diskutere om en model der af natur er *præskriptiv*, anvendes som om den er deskriptiv. Et eksempel på en hårfin balance mellem de to typer, er befolkningsmodeller der rækker ud i fremtiden. Ofte vil sådanne modeller blive anvendt, som om de faktisk beskriver befolkningstallet frem i tid.

Men modellen kan også opfattes, som en model, der bestemmer hvordan befolkningstallet i fremtiden skal fastsættes. Hvis modellen skal bruges til at lave eksempelvis økonomiske eller miljømæssige konsekvenser af befolkningsudviklingen, kan modelbyggeren have en interesse i, at fremtidens befolkningstal fremstår, som noget bestemt. Det kan være uhyre vanskeligt at bestemme, hvad der kan regnes for en objektiv beskrivelse af fremtiden, men den kritiske refleksion er vigtig.

## 4.6 Eksempler på metode *med matematik* i SRP

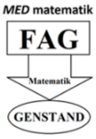


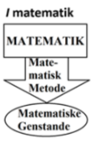




**Eksempel 12:** *Hvordan stoppes en epidemi?*

I en SRP mellem biologi og matematik, kan man undersøge spørgsmålet om hvordan en epidemi (f.eks. pest, spansk syge, ebola eller coronavirus) bremses eller stoppes. Her kan en matematisk epidemimodel anvendes til at beskrive udviklingen i en epidemi. Typisk vil modellen blive hentet i den rige litteratur over epidemi-modeller.

En anvendelse af modellen kan bruges til at simulere forskellige epidemiske udbrud, danne sig et overblik over hvilke af de faktorer, der indrammes af modellen, der har betydning for udbredelsen. En vurdering af modellen, kan vise, om modellen i sin form egner sig til at besvare spørgsmålet, eller om modellen skal justeres (endnu engang).

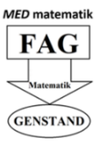



**Eksempel 13:** *Hvordan udvikler en skovbrand sig?*

I en SRP mellem geovidenskab og matematik, kan man forsøge at beskrive hvordan en skovbrand udvikler sig. Hvis der i litteraturen ikke kan findes en model for dette, kan et centralt element i opgaven være at modellere denne udvikling selv. Det vil kræve en passende afgrænsning af situationen med en skovbrand, antagelser om hvordan den spredes, hvordan skoven ser ud mv.

Ved et gennemløb i modelleringscirklen, kan modellens erkendelser holdes op imod data og vurderes. Det kan f.eks. være satellitfoto eller anden dokumentation af faktiske skovbrandes udvikling.




**Eksempel 14:** *Hvordan måles et samfunds velstand?*

I SRP mellem samfundsfag og matematik, kan man forsøge at dykke ned i begrebet bruttonational-produkt (BNP), som et mål for velstanden i et samfund. Det vil først kræve en modelanalyse, hvor det kortlægges, hvordan en lang række økonomiske oplysninger om et samfund aggregeres til en samlet vurdering af samfundets velstand.

Analysen kan oplagt følges op af en modelkritik, hvor det diskuteres om BNP-modellen er *deskriptiv* eller *præskriptiv*. Er det tal modellen fastsætter en "objektiv" måling af hvor rigt det pågældende samfund er, eller er modellen omvendt en definition af, hvad der skal regnes for at være bidrag til velstand? I forlængelse heraf kan der kastes et kritisk blik på, om modellen mest anvendes i den ene eller den anden betydning.

# 5. Metoder til arbejde *om matematik*

Det er et særligt træk ved faget matematik, at man ofte vælger at se på det ude fra. Altså at gøre faget i sig selv til genstand for undersøgelse i andre fag. Sådanne undersøgelser kan naturligvis laves på alle fag i fagrækken, men matematik synes at appellere særligt til sådanne studier.

I denne tekst vil vi skelne mellem tre forskellige typer af arbejder *om matematik*:

1. *Om matematikken selv.* Det rene studie af matematikfaget selv. Denne type undersøgelse passer bedst ind i skemaet ”fag undersøger, med sine metoder, matematik som genstand”.

2. *Om matematikkens rolle.* Her undersøges matematik ikke direkte, men der undersøges med et andet fags metode en situation, hvor matematik spiller en vigtig rolle. Det er denne rolle der studeres, mere end matematikken i sig selv.

3. *Sammenligning med andet fag.* Her sammenlignes noget (f.eks. begreber og eller metoder) i matematikfaget med noget lignende i et andet fag. Her er altså ikke tale om et fag der studerer et fag, men om at man som observatør ser ned på to fag, for at sammenligne noget i dem. Det passer altså ikke helt ind i skabelonen, men har dog klart karakter af at være et arbejde *om matematik*.

Undersøgelser *om matematik* har umiddelbart det til fælles, at det kan være svært at se, at matematik overhovedet bidrager med metoder i arbejdet. Det viser sig dog, at det at bringe et andet fags metoder i spil til at undersøge matematikken, i sig selv kræver en solid indsigt i matematik som fag.

Det bliver således et behov for aktivt at vise, hvordan det andet fags metoder kombineres med matematikkens. Ofte vil dette betyde, at der bringes metoder i spil som er hentet fra arbejde *i matematik* og/eller *med matematik*. De to andre roller vil altså typisk have en central plads ved siden af *om matematik*-rollen.

### 5.1 Om matematikken selv

Det mest almindelige eksempel på at arbejde om matematikken i sig selv, er *matematikkens historie*, ved behandling af matematikhistoriske kilder. Her gøres matematik til genstand i historie.

Andre almindelige eksempler er, hvis man vil gøre matematik til genstand for en formidling. Her vil typisk faget dansk, men det kunne også være mediefag, billedkunst eller lignende, blive brugt som et fag der arbejder med formidling med matematikfaget som genstand.

Et tredje eksempel er, at man med faget *filosofi* undersøger forskellige sider af matematikken som videnskab. Det vil sige stiller filosofiske spørgsmål til faget matematik. Her kan nogle af de problemstillinger om fagets natur, som præsenteredes i kapitel 2, være til inspiration.

Hvis man arbejder med matematikkens historie, skal man overveje om man ser på et nedslag i historien (*synkront*) eller på en udvikling over tid (*diakront*). Hvis man ser på differentialregningens historie, kan man f.eks. studere striden mellem Newton og Leibniz om, hvem der formulerede den først (synkront arbejde). Men man kan også se på dens udvikling fra Nicole Oresme og Merton skolen i 1300-tallet og frem til den moderne formulering i 1800-tallet (diakront arbejde).

I en historisk undersøgelse af matematik, vil der være brug for at trække på metoderne til arbejde *i matematik*. Ofte vil der i historisk matematik være anvendt en anden anden – eller slet ingen – matematisk notation. Og der kan være brug for at forstå et bevis eller en konkret problemløsnings-metode, som den har taget sig ud historisk.

I en danskfaglig undersøgelse af formidling af matematik, vil der være brug for at tage danskfaglige metoder om argumentation, målgruppe, disposition mv. i brug. Disse metoder kobles med den viden, man har om det matematiske stof der skal formidles.

Hvis man f.eks. vil arbejde med formidling af begrebet uendelighed, knytter der sig en række begreber og notationer til emnet, som må indtænkes i formidlingen. Man kan sige, at metoden til arbejde *om matematik*, i høj grad bliver til ved kombination af det andet fags metoder og de metoder, der kendes fra arbejdet *i matematik*.

Et motiv til at skrive en SRP af ovenstående art, er ofte en dyb interesse i et rent matematikfagligt emne. Det kunne f.eks. være et ønske om at studere tallet $\pi$. Men en SRP kun om det, kan være svær at få til at opfylde såvel faglige krav, som kravet om brug af flere metoder.

Her kan historien om $\pi$ være en måde at løse disse problemer på. Eksempelvis kan man arbejde *synkront* med den antikke græske bestemmelse af tallet, eller *diakront*, med udviklingen fra det antikke Egypten til den rolle det i dag spiller i trigonometriske funktioner.

### 5.2 Om matematikkens rolle

I denne type arbejde *om matematik*, undersøges den rolle matematikken spiller. Det er altså ikke matematikken selv der undersøges, men den betydning, som den har i en bestemt situation.

Også her er samarbejdet med historie almindeligt. Det kan være, at man ønsker at undersøge matematikkens rolle i den naturvidenskabelige revolution. Fokus er så ikke på matematikkens historie, men på dens *historiske rolle*. Hvad matematikken betød for en udvikling uden for matematikken.

Et andet eksempel er matematikkens betydning for udviklingen af 2. verdenskrig, med særlig fokus på polske og engelske matematikeres arbejde med at bryde den såkaldte ENIGMA-kodemaskine, som tyskerne anvendte til at kommunikere hemmeligt.

Man kan også kombinere undersøgelse af et matematikhistorisk tema med matematikkens historiske rolle. Eksempelvis et studie af matematikkens historiske rolle i oldtidens Egypten og Grækenland.

Også samarbejder med litterære fag (dansk eller fremmedsprog), om matematikkens rolle i bestemte litterære værker, er en mulighed. Det kan være i det kendte eventyr ”Alice i eventyrland”, i den meget matematikinspirerede roman ”Flatland” eller en lang række andre romaner. Der findes også skuespil og filmatiseringer, hvor matematikkens rolle for fortællingen, kan undersøges.

Også i kunsten er det muligt at undersøge matematikkens rolle. Det kan være i kunstværker med anvendelse af såkaldt ”gyldent snit”, som bruges til at undersøge om kunstneren har benyttet bestemte (matematiske) teknikker til at fremme sit budskab. Eller i arkitektur, hvor bestemte matematiske figurer (f.eks. parabler og kædelinjer) kan spille en særlig rolle.

Undersøgelser af matematikkens rolle i kunsten, kan dels ske med kunstneriske fag som billedkunst og arkitektur og design eller i sprogfag. F.eks. er der meget matematik i kirken Sagrada Familia i den spanske by Barcelona, som kunne undersøges i samspil med faget spansk.

Man kan også forestille sig, at man sammen med faget *religion* ser på matematikkens rolle i religiøse forestillinger (historisk såvel som nutidigt). Man kan med samfundsfag se på hvilken rolle matematik spiller i det moderne samfund, f.eks. ved indkomstdannelse.

Det vigtige er, at det fag man samarbejder med, har metoder til at studere matematikkens rolle. Det er f.eks. ikke muligt i samarbejde med et naturvidenskabeligt fag, at undersøge matematikkens rolle i naturvidenskaben. For naturvidenskabelige fag har ikke metoder til en sådan undersøgelse.

Metodisk bliver opgaven altså at kombinere samarbejdsfagets metoder og matematikkens metoder, til en helhed, som gør det muligt at undersøge matematikkens rolle i den pågældende situation.

## 5.3 Sammenligning med andre fag

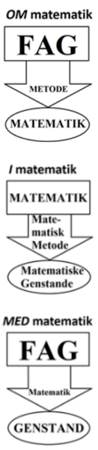
Når man sammenligner matematikken med et andet fag, har man ikke noget fag til at levere undersøgelsesmetoden. Den må man selv levere i tæt samspil med viden og metoder fra matematik og det andet fag.

Et eksempel på en sammenligning, kan være en undersøgelse af *argumentet* i matematik i forhold til i et fag som filosofi. Hvilke forskelle og ligheder ser man i fagenes syn på, hvad ”et argument” er? Man kan også fokusere mere direkte på den egentlige *logik*, som også spiller en afgørende rolle i de to fag. Et andet eksempel kan være begreber som ”metafor”, som kan have forskellig betydning i fagene dansk og matematik (hos matematikfilosoffen Lakoff).

Et tredje eksempel kan være begrebet ”bevis”, som kan have forskellig betydning i matematik og andre fag, f.eks. faget religion, hvor man kan tale om ”gudsbeviser”. Eller man kan sammenligne begrebet ”sandhed”, som det anvendes i fagene matematik og oldtidskundskab.

I denne type samspil kan man også sammenligne matematik og naturvidenskabelige fag. Det kunne eksempelvis være betydningen og brugen af ”differentialkvotient”, af ”modellering” eller af ”eksperimentets rolle” i matematik og fysik.

## 5.4 Eksempler på metode *om matematik* i SRP



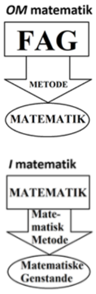

**Eksempel 15:** *Vækstmodellernes historie*

I en SRP kan man eksempelvis undersøge den historiske oprindelse af matematiske beskrivelser af vækstfænomener. Undersøgelsen kan være *diakron*, med en række historiske nedslag eller *synkron*, hvor der arbejdes i dybden med historien bag en konkret model.

I den diakrone tilgang kunne man starte med den britiske præst Malthus’ beskrivelser af lineær og eksponentiel vækst. Derpå kan man gå videre til den belgiske matematiker Verhulst, som formulerede *logistisk vækst* og videre til den britiske aktuar Benjamin Gompertz’ arbejde med at opstille den vækstform, som i dag kendes som Gompertz-vækst. Undersøgelsen kan lede frem mod moderne numeriske (diskrete) vækstmodeller baseret på stor regnekraft.

I en *synkron* tilgang, kan man dykke ned i eksempelvis Verhulst’ udvikling af logistisk vækst, herunder de historiske betingelser, der gjorde at han kastede sig over det.

I et arbejde af ovenstående art, vil der være brug for at kombinere historiefaglige metoder med metoder fra arbejde såvel *i matematik* som *med matematik*.



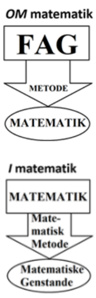

**Eksempel 16:** *Formidling af spilstrategier*

I en SRP hvor man ønsker at formidle viden om strategier i spil, hvor sandsynlighed spiller en central rolle, kan man med fordel kombinere matematisk indsigt i sandsynlighed, med en danskfaglig indsigt i hvordan fagligt stof formidles.

En SRP af denne art vil som oftest bestå af en redegørelse for matematisk sandsynlighedsteori, hvor der arbejdes *i matematik*, samt en anvendelse af denne teori på konkrete spil (f.eks. poker), med metoder fra såvel arbejde *i* som *med* matematik.

Herefter skrives en formidlende populærvidenskabelig artikel til et passende valgt medie og en passende valgt målgruppe. Artiklen er det konkrete eksempel på, hvordan et matematikholdigt stof formidles.

SRP'en rundes af med en danskfaglig *metadel*, hvor der argumenteres for den fremstilling af stoffet, som er brugt i artiklen. Her arbejdes *om matematik*, og anvendes danskfaglige metoder, som skal tilpasses den matematikfaglige viden og metoder, der formidles i artiklen.




**Eksempel 17:** *Bogen "Zombies and Calculus"*

I en SRP med engelsk og matematik, kan man analysere romanen "Zombies and Calculus". Romanens hovedperson er professor i matematik og som titlen antyder, indgår der et klassisk forløb hvor "raske" mennesker jages af "zombier".

I løbet af historien forklares flugten fra en zombie, ved at beskrive dynamikken i en forfølgelse ved hjælp af matematik. Det giver mulighed for at dykke ned i den matematiske model, forsøge at kortlægge hvordan den er skruet sammen og analysere hvilke handlinger det kan give anledning til i bogen.

Et særligt centralt aspekt af en analyse som denne, er den *rolle* matematikken spiller for den pågældende roman. Kunne den samme roman være skrevet uden at matematikken spillede en rolle, eller gør matematikken en afgørende forskel for handlingen?

Der kan laves en del SRP'er af samme art over forskellige værker. En anden mulighed er skuespillet "Proof", der handler om en ung matematikstuderende, hvis far, der var en berømt matematiker, dør af demens. I skuespillet spiller det matematiske bevis en særlig rolle, og det er således en mulighed at kombinere et *i matematik*-arbejde om beviser med en dybere undersøgelse af den rolle, det matematiske bevis spiller i skuespillet.

# 6. Basal videnskabsteori og matematik

*Videnskabsteori* er egentlig en underdisciplin af filosofien, som studerer videnskabens væsen. Særligt spørgsmål om *eksistens* af de ting, der studeres i videnskaben, samt karakteren af den *erkendelse* der opnås, står centralt i videnskabsteorien.

Inden for de fleste fag taler man om *fagets videnskabsteori*, hvor man søger at besvare spørgsmål om eksistens og erkendelse for det specifikke fag. Der er således en disciplin på grænsen mellem matematik og filosofi, som kaldes *matematikkens videnskabsteori*.

Den *basale videnskabsteori*, som behandles i forbindelse med SRP-skrivning i gymnasiet, handler om at reflektere over de faglige metoder, der anvendes. Herunder hører at kunne sætte dem ind i et større videnskabeligt perspektiv.

Ofte kan refleksionerne beskrives i en række begrebspar, som italesætter nogle principielle modsætninger mellem forskellige former for videnskab. I dette kapitel vil matematikfaget blive indplaceret i forhold til de mest relevante af disse begrebspar.

### 6.1 Real vs. Formal videnskab

En real-videnskab beskæftiger sig med virkeligheden, som den ser ud, uden for den menneskelige erkendelse. En formal-videnskab beskæftiger sig med det, som eksisterer i kraft af formelle systemer skabt i menneskers tankeverden.

Som udgangspunkt beskrives matematik som et *formal*-videnskabeligt fag. Som beskrevet i kapitel 2, er genstandene i den rene matematik rene tankeobjekter, som kun findes i den menneskelige erkendelse. Arbejdet med matematisk teori er således af *formal* karakter.

Imidlertid kan man i matematik også arbejde med modeller, som beskriver forhold i den virkelige verden, der er uafhængige af den menneskelige erkendelse af dem. Den anvendte side af matematikken er således et samspil mellem en *real* og en *formal* tilgang.

Når matematikken arbejder *formalt*, opnår man viden om matematikkens egne genstande. Det er ved formalt videnskabeligt arbejde, at der opnås viden om tal, funktioner og abstrakte geometriske figurer som trekanter, cirkler og banekurver.

Når der arbejdes *realt* med matematikken, opnås viden om genstande fra verden rundt om matematikken – typisk genstande fra andre fag, men de behøver ikke at høre til i noget fag.

### 6.2 Empirisk vs. Analytisk viden

I basal videnskabsteori skelnes mellem *empirisk* og *analytisk* viden.

*Empirisk* viden er viden, som er indhøstet via *erfaring* (ofte kaldet *empiri*). Erfaringer kan stamme fra mange forskellige kilder, og fag, der betjener sig af empiri, har typisk en grundig beskrivelse af grundlaget for indsamling og anvendelse af denne – det vil sige for *empiriske metoder*.

*Analytisk* viden er viden, som er indhøstet via *tænkning*. Det betyder, at der ud fra et eksisterende vidensgrundlag sluttes til ny viden. Ved en sådan slutning skal det naturligvis altid godtgøres, hvorfor den eksisterende viden berettiger til at regne den nye viden for sand.

Da matematik i udgangspunktet handler om rene tankeobjekter, er matematisk viden også af natur analytisk. Det er ikke som sådan muligt at opnå viden om matematikkens genstande ved at indhøste erfaringer. Den nye viden man opnår, slutter man sig til ud fra den eksisterende viden. Når der arbejdes *i matematik*, opnås altså analytisk viden med analytiske metoder.

Når der arbejdes *med matematik*, er sagen anderledes. En matematisk model kan både have et *empirisk* og et *analytisk* grundlag.

En analytisk model baserer sig på en teoretisk forventning til modellen. Det kan være nogle naturlove, der regnes for sikre. Det kan være en erfaringsbaseret viden, der regnes for næsten sikker. Eller det kan være antagelser, som blot virker fornuftige, eller som ønskes testet via modellen. Hvis en model bygger på teoretiske forventninger, kaldes det en *teoribaseret* model.

En empirisk model baserer sig på empirisk data. Man kan således tale om en *databaseret* model. Data kan behandles på mange forskellige måder, men en af de velkendte er modeller opstillet på baggrund af regression.

Inden for empiriske metoder, kan det være fornuftigt at skelne mellem to principielt forskellige typer,  som kan være gode at kunne henvise til i en diskussion af empiriske modeller.

På den ene side de *eksperimentelle* metoder, hvor data indsamles i situationer, hvor man har fuld kontrol over hvordan indgående parametre varieres. Det giver mulighed for at fastholde alle parametre på nær én, som man varierer kontrolleret. Et sådant eksperiment vil give kontrolleret viden, men må samtidig foregå i omgivelser, der er fjerne fra det undersøgtes normale omgivelser.

På den anden side *observationelle* metoder, hvor data indsamles ude i felten, der hvor det undersøgte objekt typisk findes. Her har man som undersøger ingen eller kun lidt kontrol med den situation der undersøges, men må nøjes med de data, der i situationen byder sig til.

### 6.3 Deduktive vs. Induktive slutninger

Begrebsparret *deduktiv-induktiv* refererer til den måde man slutter sig til ny viden på. Den mest almindelige måde at definere begreberne på er, at *deduktiv* betyder at slutte fra det generelle til det specielle. *Induktiv* betyder omvendt at slutte fra konkrete eksempler til generel regel.

I matematik arbejdes meget ofte *deduktivt*. Man kender en generel regel for sammenhængen mellem radius og areal for en cirkel, og man kan ud fra denne slutte sig til arealet af en cirkel med radius 5. Omvendt vil man typisk ikke arbejde *induktivt* med samme scenarie, dvs. at man vil næppe ud fra et større antal cirkler med kendt radius og areal slutte sig til, hvordan sammenhængen generelt er.

Imidlertid betyder *deduktiv* noget mere i matematik, end den generelle betydning. Ofte slutter vi os i matematik fra kendte generelle regler til nye generelle regler. Også her taler vi om at arbejde *deduktivt*. Begreberne handler altså mere om hvad der sluttes *fra*, end hvad der sluttes *til*.

Den mest centrale metode i udviklingen af matematisk teori er at opstille en samling af *aksiomer*, ud fra hvilke vi kan slutte, dvs. *deducere*, os til den samlede teori. Derfor kaldes sådanne for matematikken helt centrale metoder *aksiomatisk-deduktive*.

Det er imidlertid ikke umuligt at arbejde med *induktive* metoder i matematik. Som beskrevet i kapitel 3, findes der *numerisk problemløsning* og *eksperimenter*, der begge har karakter af at være slutninger fra en række konkrete tilfælde til generel, men ikke sikker, viden.

Det er altså ikke udelukket på forhånd, at der i matematik arbejdes induktivt, men man skal være opmærksom på, at den viden der opnås ikke er endelig og sikker. Sådan er det også, når der arbejdes induktivt i andre fag. Der er således ikke noget principielt forkert ved induktive metoder, når blot man tager passende forbehold for de konklusioner der drages af dem.

Derudover kan der arbejdes både deduktivt og induktivt *med matematik*. I en matematisk model kan der udledes ny viden ved rene tankeprocesser. Sandhedsværdien af denne nye viden, vil naturligvis afhænge af kvaliteten af modellen. En databaseret model kan kaldes *induktiv*, fordi den netop søger at beskrive et generelt mønster udledt af en række konkrete tilfælde.

En sidste type metode der nævnes her, er *hypotetisk-deduktiv*, som især er kendt fra naturvidenskaberne. Med afsæt i en hypotese om, at noget gælder, udledes en række konsekvenser, som herefter kan afprøves empirisk. Hvis konsekvenserne ikke er opfyldt, må hypotesen forkastes.

En matematisk model kan således opfattes som en hypotese, der kan forkastes empirisk. Og inden for statistiske test anvendes metoden også ved, at en nulhypotese om en bestemt sandsynligheds-parameter fremsættes og afprøves ved et statistisk test – f.eks. binomialtest.

# 7. Matematik til den mundtlige prøve

Spørgsmålet om "metoder og basal videnskabsteori" er især relevante til den mundtlige prøve. Der er ikke i SRP-læreplanen noget krav om, at disse overvejelser findes direkte i det skriftlige produkt. De må naturligvis gerne være der, men det er til den mundtlige prøve, at de særligt skal behandles.

Den mundtlige prøve varer samlet 30 minutter, hvoraf de første 10 minutter er forbeholdt elevens præsentation, hvor »*projektets centrale problemstillinger og vigtigste konklusioner*« fremlægges.

Herefter følger en faglig samtale mellem elev, vejleder og censor. Om præsentationen og samtalen hedder det i læreplanen, at der »*skal der indgå metodiske og basale videnskabsteoretiske overvejelser, som er relevante i forbindelse med projektets gennemførelse*«.

Efter eksaminationen fastlægger vejleder og censor en karakter for opgaven. Karakteren er en samlet karakter for den skriftlige og den mundtlige præstation. I bedømmelsen skal der fra den mundtlige præstation lægges særlig vægt på følgende tre punkter:

- den mundtlige præsentation af projektet og dets vigtigste konklusioner
- faglig indsigt og fordybelse i den faglige dialog samt kombination af viden fra indgående fag.
- eksaminandens evne til at foretage metodiske, tværfaglige og basale videnskabsteoretiske overvejelser i forbindelse med projekter og valg af indgående fag, herunder argumentation for eventuelt valg af ét fag.

I forhold til denne tekst er det særlig vigtigt at lægge mærke til det sidste punkt. Som en del af præsentationen skal der være en fremstilling af overvejelserne bag de metoder, der er anvendt for at komme frem til projektets svar på den stillede opgaveformulering.

Det første man bør forberede, er en begrundelse for hvorfor de indgående fag er valgt. Her bør man naturligvis tage afsæt i den problemstilling, der oprindeligt er opstillet, og forklare hvorfor matematik er relevant i besvarelsen af denne. Her kan en bevidsthed om de tre roller, *i matematik*, *med matematik* og *om matematik* være oplagt at inddrage.

Særligt vigtigt er det at argumentere for sit valg, hvis man har udarbejdet opgaven enkeltfagligt. Der er dels behov for at forklare, hvorfor problemstillingen er bedre besvaret med kun matematik, end ved inddragelse af yderligere et tilgængeligt fag. Dels behov for at forklare, hvorfor det udførte arbejde opfylder kravet om at "kombinere forskellige faglige tilgange og metoder".

Det andet man bør gøre, er at danne sig et overblik over de metoder man har anvendt for at besvare sin opgaveformulering. Her er det vigtigt at huske, at en metode er noget man konkret har gjort. Det er ikke en abstrakt remse som kunne være formuleret, længe før man skrev opgaven.

De begreber, som er præsenteret i denne tekst, kan man opfatte, som elementer, der stykkes sammen til den konkrete metode, man har anvendt. Har man arbejdet *i matematik* med at forstå et bestemt matematisk emne, kan man altså tale om, hvordan ens metode trækker på notation, begreber, eksisterende teori og beviser.

Har man arbejdet *med matematik*, bør man have et bevidst sprog om, hvordan man har udført modellering, hvordan man har anvendt sin model eller eventuelt hvordan man har analyseret, vurderet og kritiseret en model, man har lånt fra andre. Inddragelse af underbegreberne fra modelleringscirklen vil være en understregning af bevidstheden om den metode, der har været anvendt.

Har man arbejdet *om matematik*, bør der være en klar præsentation af hvordan elementer af metoder fra arbejde *i matematik* og/eller *med matematik* er kombineret med metodeelementer fra andre fag.

Det tredje man skal, er at forholde den eller de konkrete metoder, man har anvendt, til det generelle videnskabelige billede. Her kommer den basale videnskabsteori i spil. Begreber der kan bruges til at omtale videns- og erkendelsesformer på tværs af fagene, bør anvendes på det man konkret har gjort.

Her er det vigtigt, at man formulerer sig korrekt. Det er eksempelvis forkert at sige, at man har ”brugt den deduktive metode” eller ”den eksperimentelle metode”. Der findes ikke én metode som er ”den deduktive” eller en metode som er ”den eksperimentelle”.

Derimod skal man omtale det, man konkret har gjort, som ”en deduktiv metode” eller som ”en eksperimentel metode”, og dermed trække på den generelle viden, der er om metoder af disse typer, til at kunne sige noget om karakteren af det svar man er kommet frem til.

Det aller vigtigste at gentage, i forhold til diskussion af metoder og basal videnskabsteori, er, at det altid skal omhandle det man konkret har gjort. En remse, der kunne være sagt til en anden eksamination, er ikke god nok. Når man taler om metoder og basal videnskabsteori, skal det være specifikt i forhold til ens egen SRP. Det er således let at afgøre, om andre kunne have sagt det samme.

**Få mere information om emnet i denne tekst i følgende bøger:**

- ”Basal videnskabsteori”, Kasper Larsen og Christoffer Boserup Skov (Gyldendal).
- ”Vidensmønstre”, Mads Rangvid, m.fl. (Systime).
- ”Sådan skriver du SRP”, Karsten Kristensen Back, m.fl. (Columbus).