

# OM BRUGEN AF SYMBOLER OG FORMLER I MATEMATIKUNDERVISNINGEN

FIP på HTX

19/8 2020

Marit Hvalsøe Schou

1

## INDHOLD

### Præsentation

Ph.d. - projekt om hvordan elever forstår matematiske symboler og formler

Lidt om symboler i matematik og andre fag

Forståelse og brug af formler



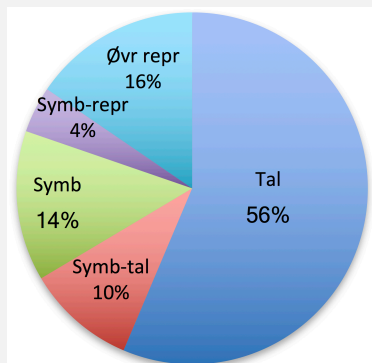
ABC – Actors at the Scene of Mathematics

2

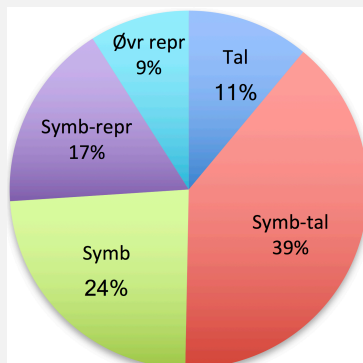
2

## HVOR MEGET BRUGES SYMBOLERNE FØR OG EFTER SKIFTET TIL GYMNASIET?

GRUNDSKOLEN



GYMNASIET



- Tal er den altdominerende repræsentations-form i grundskolen, men fylder meget mindre i gymnasiet.
- Omvendt fylder abstrakte symboler meget i gymnasiet og kun lidt i grundskolen
- Gymnasielærerne taler ikke **om** symbolerne – de taler **med** dem!

3

3

Vi skriver:

En lineær sammenhæng mellem to variable  $x$  og  $y$  er givet ved denne ligning:

$$y = ax + b$$

Hvor  $a$  og  $b$  er tal

*Men er  $x$  og  $y$  ikke tal?*

Eller

For alle lineære sammenhænge på formen  $y = ax + b$  gælder, at der for en given  $x$ -værdi altid findes en  $y$ -værdi, der passer ind i ligningen.

*Men hvis  $x$  og  $y$  værdier, som passer i ligningen. Hvad med  $a$  og  $b$ ? Findes der for en given  $y$ -værdi også altid en  $x$ -værdi?*

## SYMBOLER I GRUNDFORLØBET

4

4

## MATEMATISKE SYMBOLER

### FRA LITTERATUREN (LIGNINGER)

- Ukendt værdi
- Ubekendt
- Generaliseret tal
- Variabel
- Parameter

### FIRE SYMBOLROLLER

- Etiket
- Rollespil
- Påstande
- Omformninger

5

5

## MATEMATISKE SYMBOLER

En lærebog skriver fx:

En funktion er en beskrivelse af en *sammenhæng* mellem en *uafhængig* og en *afhængig* variabel

Typisk erstattes  $y$  af betegnelsen  $f(x)$ :

$$y = ax + b$$

Størrelsen  $f(x)$  læses "f af x"

Højresiden  $ax + b$  kaldes en funktionsforskrift.

- Ukendt værdi
- Ubekendt
- Variabel
- Generaliseret tal
- Parameter

6

6

En lærebog skriver fx:

En funktion er en beskrivelse af en *sammenhæng* mellem en *uafhængig* og en *afhængig* variabel

Typisk erstattes  $y$  af betegnelsen  $f(x)$ :

$$y = ax + b$$

Størrelsen  $f(x)$  læses "f af x"

Højresiden  $ax + b$  kaldes en funktionsforskrift.

## MATEMATISKE SYMBOLER

- Ukendt værdi
- Ubekendt
- Variabel
- Generaliseret tal
- Parameter

$$y = 5x + 3 \text{ hvor } x = 3$$

7

7

En lærebog skriver fx:

En funktion er en beskrivelse af en *sammenhæng* mellem en *uafhængig* og en *afhængig* variabel

Typisk erstattes  $y$  af betegnelsen  $f(x)$ :

$$y = ax + b$$

Størrelsen  $f(x)$  læses "f af x"

Højresiden  $ax + b$  kaldes en funktionsforskrift.

## MATEMATISKE SYMBOLER

- Ukendt værdi
- Ubekendt
- Variabel
- Generaliseret tal
- Parameter

$$8 = 2 \cdot x - 2$$

8

8

En lærebog skriver fx:

En funktion er en beskrivelse af en *sammenhæng* mellem en *uafhængig* og en *afhængig* variabel

Typisk erstattes  $y$  af betegnelsen  $f(x)$ :

$$y = ax + b$$

Størrelsen  $f(x)$  læses "f af x"

Højresiden  $ax + b$  kaldes en funktionsforskrift.

## MATEMATISKE SYMBOLER

- Ukendt værdi
- Ubekendt
- Variabel
- Generaliseret tal
- Parameter

$$f(x) = 2 \cdot x - 2$$

9

9

En lærebog skriver fx:

En funktion er en beskrivelse af en *sammenhæng* mellem en *uafhængig* og en *afhængig* variabel

Typisk erstattes  $y$  af betegnelsen  $f(x)$ :

$$y = ax + b$$

Størrelsen  $f(x)$  læses "f af x"

Højresiden  $ax + b$  kaldes en funktionsforskrift.

## MATEMATISKE SYMBOLER

- Ukendt værdi
- Ubekendt
- Variabel
- Generaliseret tal
- Parameter

$$f(x) = a \cdot x + b$$

10

10

En lærebog skriver fx:

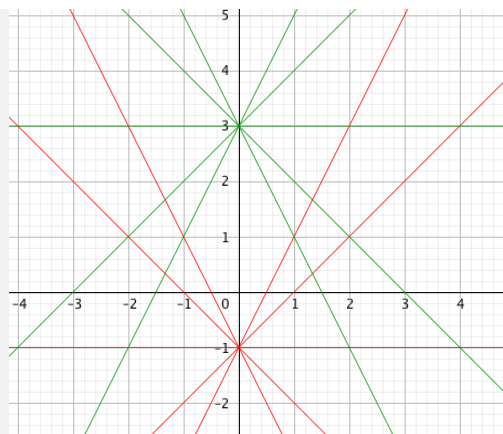
En funktion er en beskrivelse af en *sammenhæng* mellem en *uafhængig* og en *afhængig* variabel

Typisk erstattes  $y$  af betegnelsen  $f(x)$ :

$$y = ax + b$$

Størrelsen  $f(x)$  læses "f af x"

Højresiden  $ax + b$  kaldes en funktionsforskrift.



## MATEMATISKE SYMBOLER

- Ukendt værdi
- Ubekendt
- Generaliseret tal
- Variabel
- Parameter

$$y = a \cdot x + b$$

11

11

## DISKUSSION

Brug et par minutter med den/dem, der sidder nær dig på at diskutere, hvornår og hvordan I behandler de forskellige betydninger af symbolerne i jeres undervisning.

Hvordan italesætter I dem for eleverne? Og er det overhovedet nødvendigt?

12

12

## ANDRE SYMBOLROLLER

Hvad er "a"?

Etiket

Rollespil

Påstande

Omformninger

For en ret linje gennem punkterne  $(x_1, y_1)$  og  $(x_2, y_2)$  kan man finde hældningen,  $a$ , som:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Og skæringen med y-aksen,  $b$ , findes som

$$y_1 = ax_1 + b \Leftrightarrow b = y_1 - ax_1$$

De fundne tal indsættes i ligningen

$$y = ax + b$$

Skæringen med x-aksen,  $x_0$ , findes ved at sætte  $y = 0$ :

$$y = ax + b \Leftrightarrow 0 = ax_0 + b \Leftrightarrow ax_0 = -b \Leftrightarrow x_0 = -\frac{b}{a}$$

Der gælder at når  $a > 0$  vil  $f(x)$  være voksende.

13

13

## SYMBOLROLLERNE

- Etiket  
Slet og ret et navn
- Rollespil  
Notationen – hvordan man skriver ting op. Placering i udtryk angiver mening
- Påstande  
Den iboende matematiske substans fører til at man kan validere et udtryk
- Omformninger  
Indgår i omformninger, der følger de grundlæggende regneregler, men ændrer ikke værdi undervejs.

14

14

## FORMLER

### Øvelse (ca. 5 min.)

Hvordan vil du definere, hvad en formel er?

Tænk – og diskuter med gruppen.

15

15

## FORMLER

En formel kan defineres som to symbolske udtryk kædet sammen af et lighedstegn, hvor der kun kræves direkte beregninger på kendte tal.

(Claude Janvier)

16

16



## HVILKEN FORSTÅELSE AF FORMLER SER VI I VORES MATERIALER?

- Ikke entydighed
- I FORMELsamlingen finder vi også kvadratsætninger, potensregneregler, funktionsforskrifter m.m.
- I lærebøger bruges de synonymt med
  - Sammenhænge
  - Ligninger
  - Definitioner
  - Regneudtryk
  - ...

17

17

## OBSERVATION

Formler har altså flere funktioner.

De bruges til mere end beregning af en størrelse ud fra kendte værdier.

18

18

## ØVELSE

(ca. 5 min.)

Diskutér i gruppen hvilke funktioner formler har i matematikundervisningen.

19

19

## FORMELOPFATTELSER

Identifikation  
Form  
Algoritme  
Ligning  
Blueprint  
Læsning  
Med-variation

**Identifikation:** objekt er identisk med formel

**Form:** Opskrivningen bestemmer betydningen

**Algoritme:** En opskrift til beregning

**Ligning:** Der skal omformes, og symbolerne har i sig selv ingen betydning

**Blueprint:** Formlen beskriver en konkret sammenhæng

**Læsning:** Formlen fortæller noget, der skal/kan afkodes

**Med-variation:** Formlen indikerer, hvordan en ændring i en størrelse betyder ændringer i en anden/andre størrelse(r)

20

20

## ØVELSE

På de udleverede ark finder transskriptioner af 7 forskellige situationer.

I hver situation er en af de beskrevne formelopfattelser fremherskende.

Diskutér i grupper hvordan de hører sammen!

Har I oplevet lignende udsagn fra elever i undervisningen?

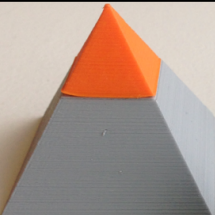
21

21

HVAD SKER DER, HVIS NOGLE AF DISSE  
OPFATTELSER IKKE ER TILSTEDE?

22

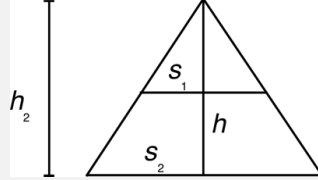
22



## EKSEMPEL

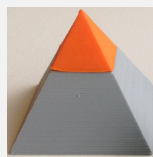
Elevne er i gang med at udlede formelen for rumfanget af en pyramide-stub med kvadratisk grundflade ud fra rumfanget af en pyramide med kvadratisk grundflade.

Sally:  $s_2$  divideret med  $s_1$  og så gange med, hvad er det den hedder,  $h$ .  
 Martin: ja.  
 Sally:  $h$ , øhhh.  
 Martin:  $h_2$ .  
 Sally:  $h_2 - h$ .  
 Martin: er det sådan vi blev enige om det? [begynder at skrive]  
 Sally: neeej.  
 ...  
 Martin: altså hvad sagde vi?  $s_2$  divideret med  $s_1$  gange ...  
 Sally: gange med  $h$ , og så får vi så [afbryder sig selv] jamen er det ikke  $h$  vi kender?  
 Lærer: jo, det er  $h$  vi kender.  
 Sally: så er det også gange med  $h$ . Så når du ganger det med  $h$ , så finder du  $h_2$ .  
 Lærer: jamen Sally, hvis du ganger med  $h$  [peger på tegning fra før]  $h$  det er jo lige pludselig sådan en side midt i et eller andet, som vi ikke kender.  
 Sally: nej, fordi  $h$ , der er det den vi kender.  $h_2$ , det er den vi ikke kender. Eller er det  $h_2$  vi kender?  
 Lærer: vi kender  $h$ . Vi kan måle tallet  $h$ .  
 ...  
 Sally: ja, det forstår jeg godt, men du kan simpelthen ikke bruge  $h_2 - h$ , for vi kender ikke  $h_2$ . **Du kan jo ikke regne noget ud, hvis du ikke kender det.**

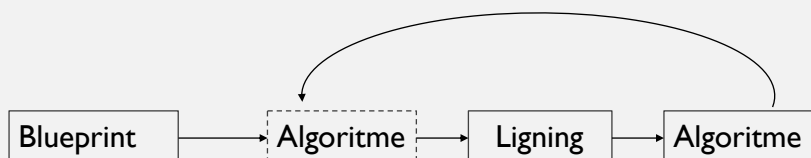


23

23



## HVAD ER DER PÅ SPIL HER?



```

graph LR
  A[Blueprint] --> B[Algorithm]
  B --> C[Ligning]
  C --> D[Algorithm]
  D --> B
  
```

For at opstille et udtryk (algoritme) til beregning af  $h$  ud fra tegningen (blueprint) skal der opstilles en ligning, som herefter manipuleres til det ønskede regneudtryk (algoritme).  
 Men for eleven Sally er formelforståelsen algoritme så stærk, at hun ikke kan komme frem til en ligning

24

24

## ELEVER SOM KOMPETENTE SYMBOL- OG FORMELBRUGERE

- Alle symbolroller og formelforståelser skal beherskes
- Der forventes en fleksibel brug af symboler og formelforståelser
- Uden ovenstående oplever eleverne problemer...

25

25

## FORMLER I UNDERVISNINGEN

- Formler benyttes på mange måder i undervisningen
- Forskellig betydning af "="
- Forskellige krav til abstraktion
- Opmærksomhed og italesættelse



26