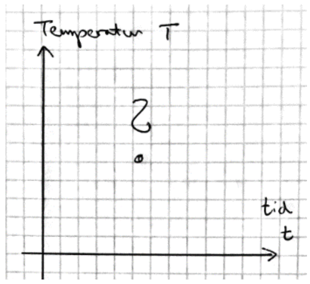
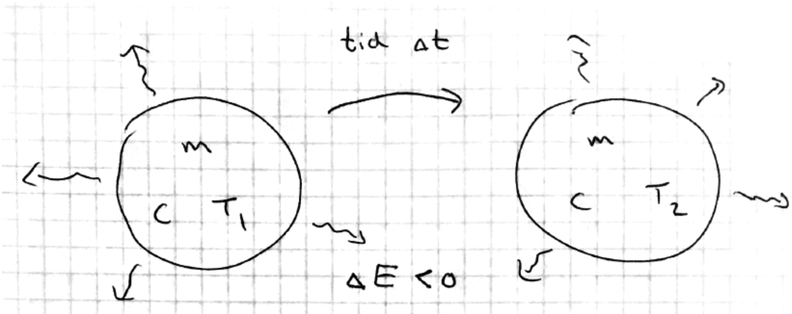
En matematisk-fysisk model for afkøling

Vi vil undersøge, hvordan vi kan beskrive afkølingen af et legeme. Det kunne fx være et brød, som lige er taget ud af ovnen. Vi opstiller en matematisk model ud fra fysikfaglige antagelser. Modellen baseres på en matematisk numerisk metode, som kaldes Eulers metode. Modellen skal afprøves ved at undersøge, om den kan beskrive faktiske målinger på legemer, som afkøles.



Opstilling af modellen

Vi betragter et legeme, som afkøles. I fysikken vil vi sige, at legemet afgiver varmeenergi E til sine omgivelser. Det betyder, at legemets temperatur T aftager. Legemet har massen m og den specifikke varmekapacitet c.



I tidsrummet Δt ændres temperaturen fra T_1 til T_2. Da legemet mister energi, er tilvæksten i varmeenergi ΔE negativ.

Fra fysikken kender vi sammenhængen mellem varmeenergi og temperatur: $\Delta E = m \cdot c \cdot (T_2 - T_1)$.

Vi *antager* nu, at varmetabet - ΔE er proportional med tiden Δt.

Vi *antager* også, at varmetabet - ΔE er proportional med forskellen mellem legemets temperatur T_1 og omgivelsernes temperatur T_{omg}.

Dvs. $\quad -\Delta E = k \cdot (T_1 - T_{omg}) \cdot \Delta t \;\Rightarrow\; \Delta E = -k \cdot (T_1 - T_{omg}) \cdot \Delta t$, hvor k er en konstant.

Vi kombinerer nu de to udtryk for ΔE og isolerer T_2 :

$$m \cdot c \cdot (T_2 - T_1) = -k \cdot (T_1 - T_{omg}) \cdot \Delta t$$

$$T_2 - T_1 = \frac{-k}{m \cdot c} \cdot (T_1 - T_{omg}) \cdot \Delta t$$

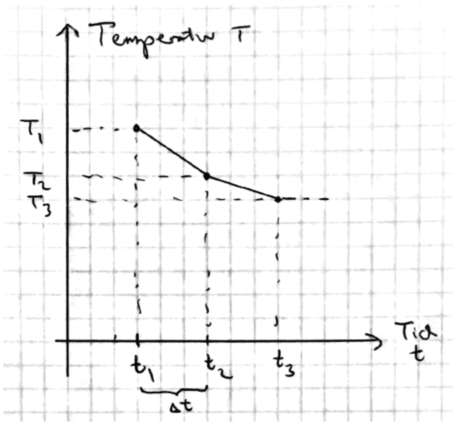
$$T_2 - T_1 = -\alpha \cdot (T_1 - T_{omg}) \cdot \Delta t$$

$$T_2 = T_1 - \alpha \cdot (T_1 - T_{omg}) \cdot \Delta t$$

Her har vi forenklet udtrykket ved at indføre en parameter $\alpha = \frac{k}{m \cdot c}$

Vi kan nu se, at vi kan beregne temperaturen T_2 ud fra T_1, omgivelsernes temperatur T_{omg} , parameteren α og tidskridtet Δt. Derved kan vi regne os fremad skridt for skridt.

Hvis vi omskriver udtrykket: $\frac{T_2 - T_1}{\Delta t} = -\alpha \cdot (T_1 - T_{omg})$, kan vi se, at venstresiden er et udtryk for sekantens hældning på grafen for temperaturen som funktion af tiden. Og denne hældning kan bestemmes ud fra højresiden, som kendes. Vi kan altså gå et skridt frem i tiden ved at antage, at temperaturen følger sekanten i det næste tidsrum Δt. Derved kan vi fremstille en graf over temperaturens udvikling som funktion af tiden:



Modellen indskrives i et regneark

Vi indskriver modellen i et regneark, her bruges Excel. Først indskrives de kendte værdier. Nedenfor er det gjort i celle B3 til B6. Parameteren α (alfa) sættes her til 0,05, men den skal senere justeres for at tilpasse modellen til måledata. Tidsskridtet er her sat til 1 minut, men kan også justeres. Jo kortere tidsskridt, jo mere nøjagtig vil modellen være. Overvej dette - tænk på sekanter og tangenter. I forhold til sammenligning med måledata kan det dog være praktisk med et tids-skridt på 1 minut.

	A	B
1	**Em matematisk-fysisk model for afkøling**	
2		
3	Starttemperatur i °C	66
4	Omgivelsernes temperatur i °C	20
5	alfa	0,05
6	tidsskridt dt i min	1

I søjle D indsættes en liste med tid i minutter. I celle D4 skrives =0 (tiden starter klokken 0). I celle D5 skrives =D4+B6. Overvej dette. $ tegnet sikrer, at der altid peges på celle B6, når formlen kopieres nedad. Celle D5 markeres nu og kopieres nedad, fx til række 100.

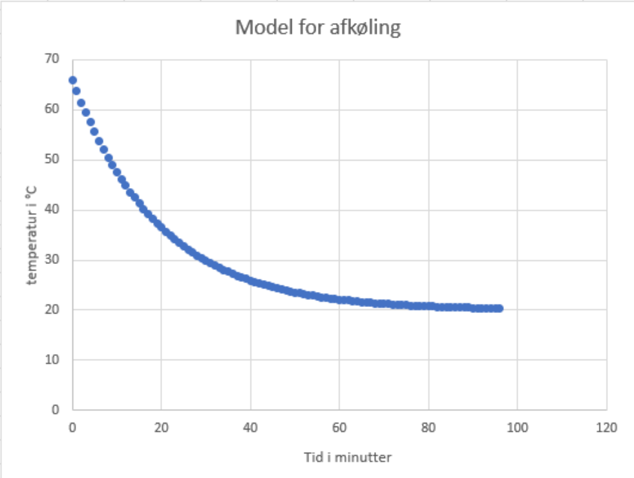
I søjle E indskrives temperaturen i grader Celsius. I celle E4 skrives = B3. I celle E5 skrives celleformlen

=E4-B5*(E4-B4)*B6

Forklar, hvorfor formlen ser sådan ud. Tip: sammenlign med udtrykket for T_2 på side 1.

Nu kopieres celle E4 nedad, fx til række 100. I vinduet ved siden af indsættes et x-y punktdiagram og grafen tegnes. Nu skulle det gerne se sådan ud:

	A	B	C	D	E
1	**Em matematisk-fysisk model for afkøling**			**Model**	
2					
3	Starttemperatur i °C	66		tid i min	temp i °C
4	Omgivelsernes temperatur i °C	20		0	66
5	alfa	0,05		1	63,7
6	tidsskridt dt i min	1		2	61,515
7				3	59,43925
8				4	57,46729
9				5	55,59392
10				6	53,81423
11				7	52,12352
12				8	50,51734
13				9	48,99147
14				10	47,5419
15				11	46,1648
16				12	44,85656
17				13	43,61374
18				14	42,43305
19				15	41,3114
20				16	40,24583
21				17	39,23354
22				18	38,27186
23				19	37,35827



Hvis du har brug for hjælp til Excel, kan du se videoen (YouTube) https://youtu.be/D9qUwuCLZ4w

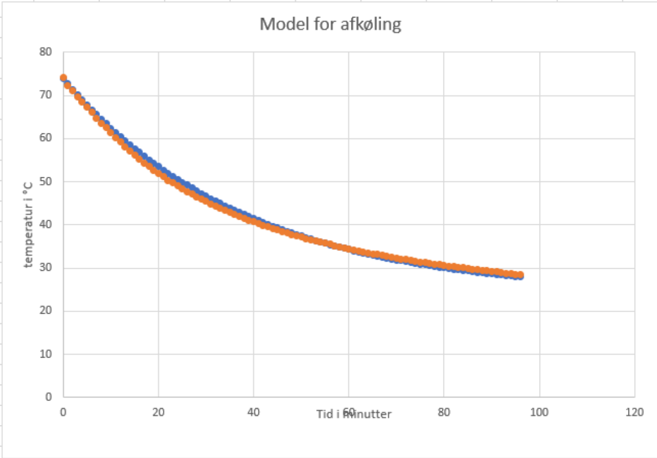
Prøv at ændre på parametrene starttemperatur, omgivelsernes temperatur, alfa og tids-skridt. Observér ændringerne i grafens forløb.

Afprøvning af modellen

Nu skal modellen afprøves! Udfør et eksperiment, hvor du måler på afkølingen af et legeme som funktion af tiden. Kopiér dine temperaturmålinger ind i regnearkets søjle E og justér tids-skridtet til det, du brugte ved temperaturmålingen. Indsæt den ekstra y-variabel i x-y punktdiagrammet. Justér nu de øvrige parametre, hvor du justerer på α til sidst. Kan du få modellen til at passe med målingerne?

Nedenfor ser du en afprøvning af modellen, hvor der er målt på afkøling af vand i et reagensglas. Måledata er kopieret ind i søjle F.
Efter indsættelse af måledata er der justeret på parametrene: Starttemperatur blev sat til 74 grader, omgivelser blev målt til 24 grader. Tids skridtet var 1 minut. Til sidst blev parameteren alfa justeret, så de to grafer passer nogenlunde.
Man ser, at der er en systematisk afvigelse. Du kan lave et residualplot for at se afvigelsen tydeligere.
Det kan skyldes, at tids skridtet er for stort. Et mindre tidskridt giver en bedre nøjagtighed. En anden mulighed er, at modellen ikke tager højde for alle fysiske forhold ved afkøling. Se punkt 6 næste afsnit: Yderligere undersøgelser.

	A	B	C	D	E	F
1	Em matematisk-fysisk model for afkøling			Model		
2						
3	Starttemperatur i °C	74		tid i min	temp i °C	målt temp i °C
4	Omgivelsernes temperatur i °C	24		0	74	74,25165116
5	alfa	0,026		1	72,7	72,41093418
6	tidsskridt dt i min	1		2	71,4338	71,03885611
7				3	70,20052	69,74580194
8				4	68,99931	68,48346323
9				5	67,82933	67,30623469
10				6	66,68976	66,11847767
11				7	65,57983	64,81777071
12				8	64,49875	63,5964324
13				9	63,44579	62,50077528
14				10	62,4202	61,30235564
15				11	61,42127	60,20895877
16				12	60,44832	59,27304506
17				13	59,50066	58,06578133
18				14	58,57764	57,05229783
19				15	57,67863	56,14130816
20				16	56,80298	55,20075523
21				17	55,9501	54,38606845
22				18	55,1194	53,50012946
23				19	54,3103	52,69912556
24				20	53,52223	51,89903549
25				21	52,75465	51,10537628



Forslag til yderligere undersøgelser

1) Udvid regnearket med nye søjler, hvor du programmerer det, så du kan tegne flere grafer for temperaturudviklingen med den eneste forskel, at det kun er tids-skridtet, som varieres. Sammenlign mindst tre forskellige grafer med hinanden. Brug $\Delta t\ = 0.1,\ \ \Delta t\ = 0.01\ og\ \Delta t\ = 0.001$

2) Tegn grafen for T-T_{omg} som funktion af tiden. Hvilken type sammenhæng er der tale om her? Kan du vise det?

3) Hvad sker der med brøken: $\frac{T_2 - T_1}{\Delta t} = -\alpha \cdot (T_1 - T_{omg})$, når $\Delta t \to 0$? Hvilken information giver dette om temperaturgrafens forløb?

4) Undersøg, om modellen kan bruges til at beskrive opvarmning af et legeme. Tænk fx på en flaske vand, som tages ud af et køleskab og sættes på køkkenbordet. Kan du ændre på modellen, så der sker en opvarmning i stedet for en afkøling?

5) Undersøg, hvordan parameteren α afhænger af massen af legemet. Her skal du udføre flere eksperimenter, hvor du bestemmer massen m og parameteren α. Kan du opstille en formel for sammenhængen mellem α og m?

6) Fysikfagligt kan modellen kritiseres. Undersøg i fysiklitteratur, hvordan et legeme kan afgive varmeenergi til sine omgivelser. Hvad tager vores model ikke højde for? En udvidelse af modellen kunne fx være et tema for en SRO i fysik-matematik.

7) Undersøg, hvordan et hårdkogt æg afkøles. Stik en termosensor ind i midten af ægget, lige efter det er kogt. Afprøv afkølingsmodellen på data.

8) Undersøg, hvad der sker med en termosensor, når den dyppes i sprit og holdes i luften. Afprøv, om modellen kan beskrive måledata.